

Klausur 2: Moderne Theoretische Physik IIIa WS 18/19Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Stefan Rex**Aufgaben**
15.04.2019**1. Diesel-Kreisprozess**

(insgesamt 30 Punkte)

Ein Dieselmotor kann näherungsweise durch einen idealisierten Kreisprozess beschrieben werden, der die Zustände 1, 2, 3, 4 in den Teilprozessen

1 → 2 adiabatische Kompression, 2 → 3 isobare Expansion,
3 → 4 adiabatische Expansion, 4 → 1 isochore (d.h. $V=\text{konst.}$) Abkühlung

durchläuft. Der Prozess wird durch die Kenngrößen $\nu = V_1/V_2$ und $\rho = V_3/V_2$ charakterisiert, wobei $1 < \rho < \nu$. Außerdem sei die Temperatur T_1 bekannt. Wir betrachten den Dieselprozess für ein klassisches ideales Gas mit f Freiheitsgraden.

- (a) Leiten Sie, ausgehend von der inneren Energie $U = \frac{f}{2}Nk_B T$, zunächst allgemein die Änderung der Entropie beim Übergang von einem Anfangszustand mit T_a, V_a zu einem Endzustand mit T_e, V_e her. Berechnen Sie anhand dieses Ausdrucks den Adiabatenexponenten κ für beliebiges f . (κ ist durch den Zusammenhang $pV^\kappa = \text{konstant}$ bei einer adiabatischen Zustandsänderung definiert.) **(6 Punkte)**
- (b) Geben Sie die Temperaturen T_2, T_3 und T_4 in Abhängigkeit von T_1, ν, ρ und κ an. **(3 Punkte)**
- (c) Geben Sie für die Prozesse 2→3 und 4→1 die Abhängigkeit der Temperatur von der Entropieänderung während des jeweiligen Prozesses an! **(4 Punkte)**
- (d) Skizzieren Sie das p - V -Diagramm und das T - S -Diagramm! Die Zustände 1, 2, 3, 4 sollen in beiden Diagrammen gekennzeichnet sein. **(6 Punkte)**
- (e) Berechnen Sie für alle Teilprozesse die Beiträge zur mechanischen Arbeit W und zur ausgetauschten Wärme Q und geben Sie diese jeweils als Vielfache der inneren Energie U_1 im Zustand 1 an, wobei der Faktor nur von κ, ρ , und ν abhängen soll. Vorzeichenkonvention: positive Beiträge in Q und W erhöhen die innere Energie des Gases, negative reduzieren diese. **(5 Punkte)**
- (f) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η des Kreisprozesses als Wärmekraftmaschine. Wie groß ist der Wirkungsgrad η_C einer Carnot-Maschine mit gleichem Verhältnis aus maximaler und minimaler Temperatur? Zeigen Sie für den Fall $\rho = 2$, dass $\eta < \eta_C$. **(6 Punkte)**

2. Harmonisches Potential in 3D

(insgesamt 25 Punkte)

Wir untersuchen Quantenteilchen der Masse m im harmonischen Potential $V(\mathbf{r}) = a\mathbf{r}^2$ in drei Dimensionen mit $a > 0$ und dem Ort $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$.

- (a) Notieren Sie die Einteilchen-Energieniveaus E_n und berechnen Sie deren Entartungsgrad g_n für ein spinloses Teilchen. **(5 Punkte)**
- (b) Wie lautet die kanonische Zustandssumme Z_1 , wenn sich ein einzelnes Spin-1-Boson im System befindet? Berechnen Sie die freie Energie, die Entropie und die innere Energie des Systems in Abhängigkeit von der Temperatur! Wie lautet der Grenzwert der Entropie für $T \rightarrow 0$? **(10 Punkte)**

Hinweis: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$; $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$; $\sum_{n=0}^{\infty} n^2q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$ (mit $|q| < 1$)

- (c) Nun betrachten wir ein System von Spin-1-Bosonen mit Temperatur T und chemischem Potential μ im Potential $V(\mathbf{r})$. Wie lautet die großkanonische Zustandssumme Z_G und das großkanonische Potential Ω ? Wie viele Teilchen N befinden sich im Mittel in dem System? (Die auftretenden unendlichen Summen müssen Sie nicht lösen.) **(5 Punkte)**
- (d) Wiederholen Sie Teilaufgabe (c) für Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen anstelle der Spin-1-Bosonen! **(5 Punkte)**

3. Thermodynamisches Potential

(insgesamt 12 Punkte)

Von einem magnetischen System sei die Enthalpie H (bei fester Teilchenzahl) bekannt. Drücken Sie die Magnetokompressibilität bei konstanter Temperatur und konstantem Druck

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial B} \right)_{T,P}$$

ausschließlich durch Ableitungen von H aus. Der magnetische Beitrag zum Differential dH lautet $-MdB$ mit der Magnetisierung M und dem Feld B . **(12 Punkte)**

Hinweis: Wenn $f(x, y) = \text{konst.}$ so gilt $\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_f = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y}$.

4. Dichtematrix

(insgesamt 8 Punkte)

- (a) Notieren Sie zunächst allgemein die drei wesentlichen Eigenschaften einer Dichtematrix ρ (in einer Basis aus normierten orthogonalen Zuständen eines Quantensystems)! **(3 Punkte)**
- (b) Nun betrachten wir die Matrix

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & -\frac{\sqrt{3}}{4}a & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}a & \frac{1}{4}a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

mit den Parametern a und b aus den komplexen Zahlen. Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit ρ eine Dichtematrix ist? **(3 Punkte)**

- (c) Unter welcher zusätzlichen Bedingung beschreibt ρ aus (b) einen reinen Zustand? **(2 Punkte)**