Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIa WS 18/19

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Stefan Rex

Musterlösung zu Blatt 1
Besprechung: 23.10.2018

Mathematische Vorbetrachtungen

1. Eigenschaften der Spur (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für Hilbertraum-Operatoren A, B, C gilt:
(i) $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$,
(ii) Sp(ABC) $= \mathrm{Sp}(CAB) = Sp(BCA)$ und
(iii) $\mathrm{Sp}(A)$ ist unabhängig von der Basis.

Lösung:
(i) In einem Basissystem $\{|n\rangle\}$ gilt:

$$\begin{aligned} Sp(AB) &= \sum_n \langle n| AB |n\rangle = \sum_{n,m} \langle n| A |m\rangle \langle m| B |n\rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle m| B |n\rangle \langle n| A |m\rangle = \sum_m \langle m| BA |m\rangle = Sp(BA) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(ABC) &= \sum_n \langle n| ABC |n\rangle = \sum_{lmn} \langle n| A |m\rangle \langle m| B |l\rangle \langle l| C |n\rangle \\ &= \sum_{lmn} \langle l| C |n\rangle \langle n| A |m\rangle \langle m| B |l\rangle = \mathrm{Sp}(CAB) \end{aligned}$$

(iii) Eine Basistransformation sei gegeben durch U und $\tilde{A} = UAU^{-1}$. Dann folgt unter Verwendung von (ii):

$$\mathrm{Sp}(\tilde{A}) = \mathrm{Sp}(UAU^{-1}) = \mathrm{Sp}(U^{-1}UA) = \mathrm{Sp}(A)$$

2. Stirling-Formel (6 Punkte)

Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad N \gg 1. \tag{1}$$

Benutzen Sie hierzu den Zusammenhang mit der Gammafunktion

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty dx\, x^N\, e^{-x} \tag{2}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = N$ besitzt und entwickeln Sie bis zur zweiten Ordnung in der Variablen $x - N$, um ein Gaußsches Integral zu erhalten.

Lösung:

$$N! = \int_0^\infty dx x^N e^{-x} = \int_0^\infty dx \exp[\overbrace{N \ln x - x}^{f(x)}]$$

$$\text{Exponenten:} \quad \begin{aligned} f(x) &= N \ln x - x \\ f'(x) &= N/x - 1 && \Rightarrow \text{ Extremum für } x = N \\ f''(x) &= -N/x^2 && \Rightarrow \text{ Maximum bei } x = N \end{aligned}$$

also

$$f(x) = f(N) + \frac{1}{2} f''(N)(x - N)^2 + \cdots = N \ln N - N - \frac{1}{2N}(\overbrace{x - N}^{\zeta})^2 + \ldots$$

Das Integral wird dominiert vom Beitrag beim Maximum des Exponenten.

Gaußsche Näherung für die Abweichung:

$$N! \approx e^{N \ln N - N} \int_{-\infty}^\infty d\zeta e^{-\frac{1}{2N}\zeta^2} = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

3. **Legendre-Tansformation** (7 Punkte)

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U-Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ wird als Legendre-Transformierte von $U(S)$ bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$. Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch

$$dU(S) = T(S)dS \qquad \text{und} \qquad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

Lösung:

$U = U(S)$, Steigung

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \Rightarrow S = S(T) \qquad \boxed{dU(S) = \frac{\partial U}{\partial S} dS = T(S)dS}$$

$$F = F(T) = U(S(T)) - S(T)T,$$

$$dF(T) = \left[\overbrace{\frac{\partial U}{\partial S}}^{T} \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial S}{\partial T} T - S(T) \right] dT \qquad \Rightarrow \boxed{dF(T) = -S(T)dT}$$

Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes

S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S,V)$ nach S und $P(S,V)$ nach V definiert Funktionen $S(T,V)$ und $V(S,P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T,V)$ und $H(S,P)$.

Lösung:

Die Funktionen $U(S,V)$, $F(T,V)$ und $H(S,P)$ entsprechen der inneren Energie, der freien Energie und der Enthalpie.

$$
\begin{aligned}
U(S,V), \quad T &= \left.\frac{\partial U(S,V)}{\partial S}\right|_V \qquad \Rightarrow \quad S(T,V) \\
-P &= \left.\frac{\partial U(S,V)}{\partial V}\right|_S \qquad \Rightarrow \quad V(S,P)
\end{aligned}
$$

$$
dU(S,V) = T(S,V)dS - P(S,V)dV \qquad \text{Innere Energie}
$$

analog zu a):

$$
\begin{aligned}
&F(T,V) = U(S(T,V),V) - S(T,V)T && \text{Freie Energie,} \\
&dF(T,V) = -S(T,V)dT - P(S,(T,V),V)dV &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H(S,P) = U(S,V(S,P)) + V(S,P)P && \text{Enthalpie,} \\
&dH(S,P) = T(S,V(S,P))dS + V(S,P)dP &&
\end{aligned}
$$

4. Integrabilität und vollständige Differentiale (5 + 5 = 10 Punkte)

(a) Gegeben sei eine Differentialform im $\mathbb{R}^2$, $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$. Zeigen Sie: Wenn ω ein vollständiges Differential ist, so gilt:

$$
\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)_y \tag{3}
$$

Lösung: Sei $h(x,y)$ eine Funktion mit dem totalen Differential $dh = \omega$. Folglich gilt

$$
f(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,, \quad g(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,.
$$

Daraus folgt

$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}\,.
$$

Mathematisch: jede exakte Form ist geschlossen, $d\omega = ddh = 0$.

(b) Zeigen Sie nun die umgekehrte Richtung: gilt Gleichung (3), so ist ω ein vollständiges Differential.

Lösung: Sei nun $\partial_y f = \partial_x g$. Wir zeigen, dass $\oint \omega = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege ist:

$$
\oint_C \omega = \oint_{\partial A} \omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_A d\omega = -\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy \overset{\text{Gl. (3)}}{=} 0\,.
$$

Dabei haben wir den Integrationsweg C mit dem Rand ∂A einer Fläche A identifiziert und beim Auswerten von $d\omega$ verwendet, dass $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ und $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$:

$$\begin{aligned} d\omega &= (df) \wedge dx + (dg) \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \end{aligned}$$

Nun lässt sich eine Stammfunktion h konstruieren durch $h(0,0) = 0$ (willkürliche Wahl der Integrationskonstante) und $h(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega$ entlang eines beliebigen Weges.
Bemerkung 1: Wir arbeiten hier im $\mathbb{R}^2$. Auf einer allgemeinen differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert die Stammfunktion ggf. nur lokal, d.h. ω ist nicht notwendig exakt.
Bemerkung 2: Oben wurde der allgemeine Satz von Stokes verwendet, der in n Dimensionen gültig ist. Für den zweidimensionalen Fall, wie in dieser Aufgabe, kann man auch die aus der Elektrodynamik bekannte Variante verwenden:

$$\oint_{C=\partial A} \vec{v}(x,y) \cdot d\vec{s} = \int_A \mathrm{rot}\vec{v} \cdot d\vec{A}\,,$$

wobei das Vektorfeld hier die Komponenten $v_x(x,y) = f(x,y)$, $v_y(x,y) = g(x,y)$, $v_z = 0$ hat, $d\vec{s}$ das infinitesimale Element entlang des Weges C ist, und das Flächenelement $dA = dx\,dy$ senkrecht zur Fläche steht. Also erhält man wieder

$$\mathrm{rot}\vec{v} \cdot d\vec{A} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Diese Lösung erfordert keine Kenntnisse über Differentialformen. Die allgemeine Lösung ist hingegen auch auf thermodynamische Differentiale von beliebig vielen Variablen anwendbar.

(c) **(15 Bonuspunkte)** Im Fließbach wird zum vollständigen Differential erläutert: „Die Differenzierbarkeit einer Funktion zweier Variabler ist gleichbedeutend mit jeweils einer der folgenden Aussagen: [...] (ii) Die partiellen Ableitungen existieren und sind stetig.“ Beweisen Sie, dass diese Äquivalenz streng genommen falsch ist. Betrachten Sie hierfür die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) \sin\left[\left(x^2 + y^2\right)^{-1}\right]$$

(an $(0,0)$ stetig fortgesetzt) und untersuchen Sie jeweils am Koordinatenursprung die Differenzierbarkeit sowie die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen.
Bemerkung: Korrekt ist, dass aus der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen die (totale) Differenzierbarkeit folgt. Die Umkehrung gilt hingegen nicht immer. Für physikalisch relevante Fälle ist dies aber i.d.R. bedeutungslos.

Lösung: Die partielle Ableitung nach x lautet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{wenn } x^2+y^2 \neq 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(h^{-2})}{h} = 0\,.$$

Analog für $\partial_y f$. Die partiellen Ableitungen existieren also auf dem ganzen $\mathbb{R}^2$. Allerdings sind $\partial_x f$ und $\partial_y f$ nicht stetig am Ursprung. Betrachte z.B. $\partial_x f$ an den Punkten $(x_n, y_n) = (\sqrt{1/2\pi n}, 0) \overset{n\to\infty}{\to} (0,0)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = -\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n) = -\infty \neq f'(0)$$

Nun untersuchen wir das Differential am Ursprung, $df_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear. Sofern df_0 existiert, muss im Einklang mit den partiellen Ableitungen gelten $df_0 = 0$. Gemäß der Definition ist dies die Ableitung, wenn in

$$f(x,y) = f(0,0) + df_0(x,y) + R(x,y) \tag{4}$$

das Restglied R der Eigenschaft

$$\frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{wenn } (x,y)\to(0,0)$$

genügt. Offenbar gilt $R = f$, da $f(0,0) = 0$, $df_0 = 0$. Wir setzen $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und finden

$$\frac{R(x,y)}{r} = r\sin(r^{-2}) \xrightarrow{r\to 0} 0$$

Also ist f differenzierbar an $(0,0)$, obwohl die partiellen Ableitungen dort unstetig sind.

5. Funktionaldeterminantenkalkül: (8 + 5 + 10 = 23 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ der unabhängigen Variablen x und y. Als Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante) bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass folgende Relationen gelten:

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y, \qquad \frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right]^{-1}. \tag{7}$$

Lösung:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y \qquad \text{Def. der Determinante}$$

$$v(x,y)=y \quad\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x=1,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y=0 \quad\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y$$

$$u(x,y)=x \quad\Rightarrow\quad \text{analog}\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x$$

Die Beziehung

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}$$

folgt trivial aus Determinanteneigenschaft (Vertauschen von $u\leftrightarrow v$ oder $x\leftrightarrow y$ vertauscht Vorzeichen)

Nun stellen wir die Funktionen $u(s,t)$ and $v(s,t)$ mit Variablen $s=s(x,y)$, $t=t(x,y)$ vor. Dann haben wir

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y \equiv \left.\frac{\partial u(s(x,y),t(x,y))}{\partial x}\right|_y = \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y+\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y \tag{8}$$

und analog für $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ and $\partial v/\partial y$.

Auf diese Weise erhält man die Kettenregel für Jacobi-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t & \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s \\ \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t & \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Es folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial\left(u(s(x,y),t(x,y))\right),v(s(x,y),t(x,y))}{\partial(x,y)} \\
&= \left(\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y+\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right)\left(\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t\left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x+\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x\right) \\
&- \left(\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t\left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x+\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x\right)\left(\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y+\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right) \\
&= \left(\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s-\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t\right)\left(\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x-\left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right) \\
&= \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Durch Umbenennen von $x,y\to s,t$ und $s,t\to x,y$ folgt

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \quad\overset{\text{auflösen}}{\Longrightarrow}\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right]^{-1}$$

(b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen x und y durch

$$\phi(x,y)=\text{const}$$

gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_\phi = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi\right)^{-1}, \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x\right)^{-1}. \tag{11}$$

Lösung:
Die erste Relation spiegelt einfach den Satz der lokalen Umkehrbarkeit aus Analysis wieder. Z.B. so: Sei $\phi(x,y) = \text{const.}$, also $x(y)$. Dann ist das Differential

$$dx(y) = \frac{\partial x}{\partial y} dy.$$

Andererseits ist aber

$$dy(x) = \frac{\partial y}{\partial x} dx.$$

Einsetzen liefert dann

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} dx,$$

also

$$1 = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Und daraus folgt schließlich

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}.$$

Da wir ja von Anfang an $\phi = \text{const.}$ angenommen haben, dürfen wir auch noch bei beiden partiellen Ableitungen die ϕ's dazuschreiben und erhalten das gesuchte Resultat:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = \frac{\partial(y,\phi)}{\partial(x,\phi)} = \frac{\partial(y,\phi)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(y,x)}{\partial(x,\phi)} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left[\frac{\partial(x,\phi)}{\partial(x,y)}\right]^{-1} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x\right)^{-1}$$

Hier wird $\phi = \phi(x,y) = $const. als unabhängige Variable aufgefasst, d. h. $y = y(x,\phi)$.

(c) Betrachten Sie nun die drei Variablen x, y und z, die durch die Bedingung

$$F(x,y,z) = 0$$

miteinander in Zusammenhang stehen. Durch Auflösen der Gleichung $F = 0$ nach x, y und z erhalten wir die drei Funktionen $x(y,z)$, $y(x,z)$ und $z(x,y)$. Nehmen Sie weiter an, dass es einen funktionalen Zusammenhang $w = w(x,y)$ gibt. Zeigen Sie, dass die Ableitungen der Funktionen folgende Relationen erfüllen:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = -1, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z. \tag{14}$$

Lösung:

Wir betrachten x und z als unabhängige Variable, so dass $y = y(x,z)$. Das erfolgt durch Auflösen von $F(x,y,z) = 0$ nach y. Das Differenzial für y ist dann

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z dx + \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x dz$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_x \frac{\partial x}{\partial z}\Big|_y &= \frac{\partial(y,z)}{\partial(x,z)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} = -\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,z)}\frac{\partial(x,z)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} \\ &= -\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(y,x)}{\partial(z,y)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(z,y)} = -1. \qquad (15)\end{aligned}$$

Weiterhin ist $w = w(x,y)$, also

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_y dx + \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_x dy.$$

Wir substituieren $y(x,z)$ für y in $w(x,y)$, und erhalten als Differenzial für $w(x,z)$:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_x \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_y + \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_x \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z\right) dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_z = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_y + \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_x \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z. \qquad (16)$$

Analog erhalten wir aus dem Differenzial für $w(x(y,z),y)$:

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_z = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_x + \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_y \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z. \qquad (17)$$

Wir eliminieren $\partial w/\partial y|_x$ (d.h. Gl. (17) in Gl. (16) einsetzen), und erhalten

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_z = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z.$$

Wir lösen nun $w = w(x,y)$ nach x auf, betrachten also x als Funktion von y und w, d.h. $x = x(y,w)$. Wir erhalten

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_w dy + \frac{\partial x}{\partial w}\Big|_y dw$$

Dir Gleichung $F(x,y,z) = 0$ lösen wir nach x auf, betrachten also x als Funktion von y und z, und erhalten daraus $w = w(x(y,z),y)$. Das Differential für $w(y,z)$ ist

$$dw = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_z dy + \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_y dz.$$

Wir substituieren dies in die Gleichung für dx und erhalten schließlich

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_w + \frac{\partial x}{\partial w}\Big|_y \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_z.$$