

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/2019

PROF. DR. A. SHNIRMAN  
PD DR. B. NAROZHNY, M.SC. T. LUDWIG

Blatt 9  
Lösungsvorschlag

1. Hartree-Fock Näherung als Variationsproblem: (50 Punkte)

Wir betrachten  $2N$  wechselwirkende Elektronen im Potential  $U^{(1)}(r)$ , dass von Ionen (z.B. in einer Molekül oder in Metall) erzeugt ist. Der Hamilton-Operator lautet

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \int d^3r \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(r) \Delta \hat{\Psi}_{\sigma}(r) + \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(r) U^{(1)}(r) \hat{\Psi}_{\sigma}(r) \right\} + \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{1}{2} \int \int d^3r_1 d^3r_2 \hat{\Psi}_{\sigma_1}^{\dagger}(r_1) \hat{\Psi}_{\sigma_2}^{\dagger}(r_2) U^{(2)}(r_1 - r_2) \hat{\Psi}_{\sigma_2}(r_2) \hat{\Psi}_{\sigma_1}(r_1) .$$

Die Coulombabstoßung ist gegeben durch  $U^{(2)}(r_1 - r_2) = e^2/|r_1 - r_2|$ .

- (a) (15 Punkte) Als Variationsansatz für die Mehrteilchenwellenfunktion  $\Phi$  nehmen wir die Slater-Determinante konstruiert aus  $N$  unbekanntem 1-Teilchen-Wellenfunktionen (Orbitalen)  $\phi_n(r)$  ( $n = 1, \dots, N$ ). Jedes Orbital taucht zweimal in  $\Phi$  auf: einmal mit Spin rauf und einmal mit Spin runter. Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie  $E[\Phi] \equiv \langle \Phi | H | \Phi \rangle$ . Benutzen Sie die Methode der zweiten Quantisierung.

*Hinweis: Die Feldoperatoren  $\hat{\Psi}_{\sigma}(r)$  lassen sich in jeder vollständigen 1-Teilchen-Basis entwickeln, z.B.,  $\hat{\Psi}(x) = \sum_n \phi_n(x) \hat{c}_n$  (die Spin-Indizes sowohl in der Koordinate  $x$  als auch in der Quantenzahl  $n$  enthalten.). Hier  $\hat{c}_n$  ist der Vernichtungsoperator.*

Der Feldoperator lautet  $\hat{\Psi}_{\sigma}(r) = \sum_{n, \sigma} \phi_n(r) \hat{c}_{n, \sigma}$  (wir nehmen an die Wellenfunktionen sind spinunabhängig). Für  $n = 1, \dots, N$  nehmen wir die Zustände  $\phi_n(r)$  aus unserer Slater-Determinante. Für  $n > N$  nehmen wir alle anderen 1-Teilchen-Zustände, sodass die Basis vollständig ist (die werden keine Rolle spielen). Wir setzen das Feld  $\hat{\Psi}_{\sigma}(r)$  in den Hamilton-Operator ein. Das ergibt

$$\hat{H} = \sum_{n, \sigma} \hat{c}_{n, \sigma}^{\dagger} \hat{c}_{n, \sigma} \int d^3r \phi_n^*(r) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U^{(1)}(r) \right\} \phi_n(r) + \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2, m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2} \hat{c}_{n_1, \sigma_1}^{\dagger} \hat{c}_{n_2, \sigma_2}^{\dagger} \hat{c}_{m_2, \sigma_2} \hat{c}_{m_1, \sigma_1} \times \int \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_{n_1}^*(r_1) \phi_{n_2}^*(r_2) U^{(2)}(r_1 - r_2) \phi_{m_2}(r_2) \phi_{m_1}(r_1) .$$

Für die Erwartungswerte erhalten wir

$$\langle \Phi | \hat{c}_{n, \sigma}^{\dagger} \hat{c}_{n, \sigma} | \Phi \rangle = 1 \quad \text{falls } n \leq N \quad \text{sonst } 0 .$$

$$\langle \Phi | \hat{c}_{n_1, \sigma_1}^\dagger \hat{c}_{n_2, \sigma_2}^\dagger \hat{c}_{m_2, \sigma_2} \hat{c}_{m_1, \sigma_1} | \Phi \rangle = \delta_{n_1, m_1} \delta_{n_2, m_2} - \delta_{n_1, m_2} \delta_{n_2, m_1} \delta_{\sigma_1, \sigma_2} .$$

(für  $n_1 \leq N$  und  $n_2 \leq N$ , sonst 0). Das ergibt

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle &= \sum_{n \leq N, \sigma} \int d^3 r \phi_n^*(r) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U^{(1)}(r) \right\} \phi_n(r) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n_1 \leq N, n_2 \leq N, \sigma_1, \sigma_2} \int \int d^3 r_1 d^3 r_2 \phi_{n_1}^*(r_1) \phi_{n_2}^*(r_2) U^{(2)}(r_1 - r_2) \phi_{n_2}(r_2) \phi_{n_1}(r_1) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n_1 \leq N, n_2 \leq N, \sigma} \int \int d^3 r_1 d^3 r_2 \phi_{n_1}^*(r_1) \phi_{n_2}^*(r_2) U^{(2)}(r_1 - r_2) \phi_{n_1}(r_2) \phi_{n_2}(r_1) . \end{aligned} \quad (1)$$

- (b) (10 Punkte) **Im Variationsverfahren minimieren wir die Energie  $E[\Phi]$  unter Voraussetzung, dass die Orbitale  $\phi_n(r)$  normiert sind. Dafür brauchen wir die Lagrange-Multiplikatoren  $\mathcal{E}_n$ . Das relevante Funktional lautet**

$$\tilde{E}[\Phi] = \langle \Phi | H | \Phi \rangle - \sum_{n=1}^N \mathcal{E}_n \langle \phi_n | \phi_n \rangle .$$

**Variieren Sie dieses Funktional und leiten Sie die folgenden Hartree-Fock-Gleichungen für die Orbitale  $\phi_n(r)$  her:**

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \phi_n(r) &= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U^{(1)}(r) \right\} \phi_n(r) \\ &+ \sum_{n_1, \sigma_1} \int d^3 r_1 \phi_{n_1}^*(r_1) U^{(2)}(r_1 - r) \phi_n(r) \phi_{n_1}(r_1) \\ &- \sum_{n_1} \int d^3 r_1 \phi_{n_1}^*(r_1) U^{(2)}(r_1 - r) \phi_n(r_1) \phi_{n_1}(r) . \end{aligned}$$

**Beobachten Sie, dass  $\mathcal{E}_n$  die Rolle der Einteilchen-Energie übernimmt.**

Folgt direkt aus Eq. 1.

- (c) (25 Punkte) **Betrachten Sie jetzt das Jellium-Modell eines Metalls, sodass  $U^{(1)}(r) = -\int d^3 r_1 n_i(r_1) \frac{e^2}{|r-r_1|}$ . Hier ist  $n_i$  die Dichte der Ionen ( $n_i$  ist  $r$ -unabhängig innerhalb des Volumens  $V$ ). Zeigen Sie, dass der Hartree-Beitrag und der  $U^{(1)}$ -Beitrag sich gegenseitig kürzen, wenn die Elektron-Dichte  $n_e$  gleich der Ion-Dichte ist,  $n_e = n_i$ . Zeigen Sie, dass die ebene Wellen  $\varphi_p(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp[i\vec{p}\vec{r}]$  eine Lösung der Hartree-Fock-Gleichungen für das Jellium-Modell ergeben. Berechnen Sie die Energie  $\mathcal{E}_p$  (inklusive Fock-Energie) angenommen alle Zustände mit  $|\vec{p}| < p_F$  besetzt sind und alle anderen sind leer.**

$$\mathcal{E}_n \phi_n(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi_n(r) - \sum_{n_1 \leq N} \int d^3 r_1 \phi_{n_1}^*(r_1) U^{(2)}(r_1 - r) \phi_n(r_1) \phi_{n_1}(r) .$$

Wir probieren die ebenen Wellen

$$\phi_n = \phi_q(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{iqr} . \quad (2)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q e^{iqr} &= \frac{\hbar^2 q^2}{2m} e^{iqr} - \frac{1}{V} \sum_{q_1, |q_1| < q_F} \int d^3 r_1 e^{-iq_1 r_1} U^{(2)}(r_1 - r) e^{iq_1 r_1} e^{iq_1 r} \\ &= \frac{\hbar^2 q^2}{2m} e^{iqr} - \frac{1}{V} \sum_{q_1, |q_1| < q_F} U^{(2)}(q_1 - q) e^{iqr} . \end{aligned} \quad (3)$$

Also die ebenen Wellen sind Lösungen und

$$\mathcal{E}_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \frac{1}{V} \sum_{q_1, |q_1| < q_F} U^{(2)}(q_1 - q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \int_{|q_1| < q_F} \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi e^2}{|\vec{q}_1 - \vec{q}|^2} . \quad (4)$$

## 2. Hartree-Fock Näherung in Graphen:

(50 Punkte)

Wir wiederholen die obere Aufgabe für den Fall des Graphens. Eine Besonderheit dabei ist es, dass zusätzlich zu den Ort- und Spin-Koordinaten, eine Subgitter-Koordinate  $\alpha = A, B$  nötig ist. Dann ist der Feldoperator ein 2-Spinor im  $A, B$ -Raum,  $\hat{\Psi}_{\alpha, \sigma}(r)$ . Der Hamilton-Operator lautet

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\sigma, \alpha, \beta} \int d^2 r \left\{ \hat{\Psi}_{\alpha, \sigma}^\dagger(r) h_{\alpha, \beta} \hat{\Psi}_{\beta, \sigma}(r) + \hat{\Psi}_{\alpha, \sigma}^\dagger(r) U^{(1)}(r) \delta_{\alpha, \beta} \hat{\Psi}_{\beta, \sigma}(r) \right\} \\ &+ \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2} \frac{1}{2} \int \int d^2 r_1 d^2 r_2 \hat{\Psi}_{\alpha_1, \sigma_1}^\dagger(r_1) \hat{\Psi}_{\alpha_2, \sigma_2}^\dagger(r_2) \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} \hat{\Psi}_{\alpha_2, \sigma_2}(r_2) \hat{\Psi}_{\alpha_1, \sigma_1}(r_1) . \end{aligned}$$

Das Potential  $U^{(1)}(r)$  ist wieder das Jellium-Potential von Ionen.

Die  $2 \times 2$  Matrix  $h_{\alpha, \beta}$  ist der Hamilton-Operator in Graphen in der Nähe des Dirac-Punktes:

$$\hat{h} = v \begin{pmatrix} 0 & p_x + ip_y \\ p_x - ip_y & 0 \end{pmatrix} .$$

Dieses Verhalten ist korrekt für Impulse  $|\mathbf{p}| < \Lambda$ , wobei  $\Lambda$  ein cut-off Impuls ist. Das Energie-Spektrum ist dann linear  $E_{\mathbf{p}} = \pm v|\mathbf{p}|$ . Einfachheitshalber betrachten wir nur ein Tal (Valley).

(a) (10 Punkte) Leiten Sie die Hartree-Fock-Gleichungen her.

Die Wellen-Funktionen haben zusätzlich zu  $r$  eine neue Koordinate  $\alpha = A, B$ :  $\phi_n(r, \alpha)$ . Der Feldoperator lautet  $\hat{\Psi}_{\alpha, \sigma}(r) = \sum_{n, \sigma} \phi_n(r, \alpha) \hat{c}_{n, \sigma}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \phi_{n, \alpha}(r) &= \sum_{\beta} \hat{h}_{\alpha, \beta} \phi_{n, \beta}(r, \beta) + U^{(1)}(r) \phi_{n, \alpha}(r, \alpha) \\ &+ \sum_{n_1, \sigma_1} \sum_{\alpha_1} \int d^3 r_1 \phi_{n_1}^*(r_1, \alpha_1) U^{(2)}(r_1 - r) \phi_{n, \alpha}(r, \alpha) \phi_{n_1}(r_1, \alpha_1) \\ &- \sum_{n_1} \sum_{\alpha_1} \int d^3 r_1 \phi_{n_1}^*(r_1, \alpha_1) U^{(2)}(r_1 - r) \phi_{n, \alpha}(r, \alpha) \phi_{n_1}(r, \alpha) . \end{aligned}$$

Der  $U^{(1)}$ -Term und der Hartree-Beitrag kürzen sich und wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n \phi_n(r, \alpha) &= \sum_{\beta} \hat{h}_{\alpha, \beta} \phi_n(r, \beta) \\ &- \sum_{n_1} \sum_{\alpha_1} \int d^3 r_1 \phi_{n_1}^*(r_1, \alpha_1) U^{(2)}(r_1 - r) \phi_n(r_1, \alpha_1) \phi_{n_1}(r, \alpha) .\end{aligned}$$

- (b) (20 Punkte) **Zeigen Sie, dass die Eigenzustände des Operators  $\hat{h}$  eine Lösung der Hartree-Fock-Gleichungen ergeben.**

Benutzen Sie die folgende Darstellung:

$$\hat{h} = vp \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_{\mathbf{p}}} \\ e^{-i\theta_{\mathbf{p}}} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\cos \theta_{\mathbf{p}} = \frac{p_x}{p}, \quad \sin \theta_{\mathbf{p}} = \frac{p_y}{p}, \quad p \equiv |\mathbf{p}|.$$

Genauer

$$\hat{h} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} vp \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_{\mathbf{p}}} \\ e^{-i\theta_{\mathbf{p}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Die Eigenzustände von  $\hat{h}$  lauten

$$\phi_{\mathbf{p}, b}(r, \alpha) = C_{\mathbf{p}, b}(\alpha) \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b e^{i\theta_{\mathbf{p}}} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\sqrt{V}}, \quad (5)$$

oder

$$\begin{aligned}C_{\mathbf{p}, b}(A) &= b e^{i\theta_{\mathbf{p}}} / \sqrt{2} \\ C_{\mathbf{p}, b}(B) &= 1 / \sqrt{2} .\end{aligned} \quad (6)$$

Hier  $b = \pm 1$  ist der Band-Index. Die Eigenenergie lautet  $bvp$ .

Die Quantenzahl  $n$  wird zu  $n \rightarrow \mathbf{p}, b$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{p}, b} \phi_{\mathbf{p}, b}(\mathbf{r}, \alpha) &= \sum_{\beta} \hat{h}_{\alpha, \beta} \phi_{\mathbf{p}, b}(\mathbf{r}, \alpha) \\ &- \sum_{\mathbf{p}_1, b_1} \sum_{\alpha_1} \int d^3 r_1 \phi_{\mathbf{p}_1, b_1}^*(\mathbf{r}_1, \alpha_1) U^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \phi_{\mathbf{p}, b}(\mathbf{r}_1, \alpha_1) \phi_{\mathbf{p}_1, b_1}(\mathbf{r}, \alpha) .\end{aligned}$$

Wir behandeln erst die ebenen Wellen  $\frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\sqrt{V}}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{p}, b} C_{\mathbf{p}, b}(\alpha) &= bvp C_{\mathbf{p}, b}(\alpha) \\ &- \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}_1, b_1} \sum_{\alpha_1} U^{(2)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) C_{\mathbf{p}_1, b_1}^*(\alpha_1) C_{\mathbf{p}, b}(\alpha_1) C_{\mathbf{p}_1, b_1}(\alpha) .\end{aligned}$$

Wir definieren  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}$  und erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{p}, b} C_{\mathbf{p}, b}(\alpha) &= bvp C_{\mathbf{p}, b}(\alpha) \\ &- \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, b_1} \sum_{\alpha_1} U^{(2)}(\mathbf{q}) C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, b_1}^*(\alpha_1) C_{\mathbf{p}, b}(\alpha_1) C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, b_1}(\alpha) .\end{aligned} \quad (7)$$

Diese Gleichung lässt sich umschreiben wie

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p},b} C_{\mathbf{p},b}(\alpha) = bvp C_{\mathbf{p},b}(\alpha) + \sum_{\alpha_1} F_{\mathbf{p}}(\alpha, \alpha_1) C_{\mathbf{p},b}(\alpha_1), \quad (8)$$

wobei  $F_{\mathbf{p}}(\alpha, \alpha_1)$  ist die Matrix im Untergitter-Raum gegeben durch

$$F_{\mathbf{p}}(\alpha, \alpha_1) \equiv -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, b_1} U^{(2)}(\mathbf{q}) C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, b_1}(\alpha) C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, b_1}^*(\alpha_1). \quad (9)$$

Wir erhalten

$$F_{\mathbf{p}}(\alpha, \alpha_1) = -\frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, b_1} U^{(2)}(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} 1 & b_1 e^{i\theta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \\ b_1 e^{-i\theta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Der Winkel  $\theta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$  ergibt sich wie  $\theta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \theta_{\mathbf{p}} + \theta$  (siehe Abb. 1). Daher

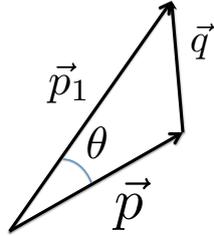


Abbildung 1:

$$F_{\mathbf{p}}(\alpha, \alpha_1) = const - \frac{b_1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, b_1} U^{(2)}(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_{\mathbf{p}}} (\cos \theta + i \sin \theta) \\ e^{-i\theta_{\mathbf{p}}} (\cos \theta - i \sin \theta) & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Aus Symmetrie-Gründen fällt  $\sin \theta$  aus und wir bleiben mit

$$F_{\mathbf{p}}(\alpha, \alpha_1) = const - \frac{b_1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, b_1} U^{(2)}(\mathbf{q}) \cos \theta \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_{\mathbf{p}}} \\ e^{-i\theta_{\mathbf{p}}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Denn  $F_{\mathbf{p}}(\alpha, \alpha_1) \sim \hat{h}$  der Spinor  $C_{\mathbf{p},b}(\alpha_1)$  ist eine Lösung der Gl. 8. Damit haben wir das erforderte bewiesen.

- (c) (20 Punkte) **Nehmen Sie an, dass das untere Band besetzt wobei das obere band leer ist. Zeigen Sie, dass sich die folgende elektronische Energie mit der Fock-Korrektur ergibt**

$$\mathcal{E}_p = \pm v(p) |\mathbf{p}|, \quad v(p) = v \left( 1 + \frac{e^2}{4\hbar v} \ln \frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|} \right).$$

Aus Gl. 8 und Gl. 12 folgt

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p},b} = bvp - \frac{bb_1}{2V} \sum_{\mathbf{q},b_1} U^{(2)}(\mathbf{q}) \cos \theta \quad (13)$$

In unserer Konstruktion können wir nur die Energien der besetzten Zustände berechnen. Dann  $b = b_1 = -1$ . Wir erhalten

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p},-} = -vp - \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}} U^{(2)}(\mathbf{q}) \cos \theta \quad (14)$$

Es ist jetzt bequemer zurück zu  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{p}_1$  zu übergehen. Dann gilt

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p},-} = -vp - \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1} U^{(2)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \cos \theta \quad (15)$$

Wir benutzen

$$U^{(2)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) = \frac{2\pi e^2}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}|} = \frac{2\pi e^2}{\sqrt{p_1^2 + p^2 - 2pp_1 \cos \theta}}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p},-} = -vp(1 + A(\mathbf{p})), \quad (16)$$

wobei

$$A(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{2Vvp} \sum_{\mathbf{p}_1} U^{(2)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \cos \theta. \quad (17)$$

Jetzt die Renormierung der Geschwindigkeit ( $\Lambda \sim 1/a$  ist ein cut-off Impuls,  $a$  ist die Gitterkonstante):

$$A(\mathbf{p}) = \frac{e^2}{2vp} \int_0^\Lambda p_1 dp_1 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{p^2 + p_1^2 - 2pp_1 \cos \theta}}.$$

Führen wir die dimensionslose Variable ein:

$$x = \frac{p_1}{p}.$$

Dann

$$A(\mathbf{p}) = \frac{e^2}{2v} \int_0^{\Lambda/p} x dx \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \theta}}.$$

Entwickeln wir den Integrand:

1.  $x \ll 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \theta}} \Big|_{x \rightarrow 0} \approx 1 + x \cos \theta + \mathcal{O}(x^2).$$

Für kleine  $x$  konvergiert das Integral.

2.  $x \gg 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \theta}} \Big|_{x \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{x} + \frac{\cos \theta}{x^2} + \mathcal{O}(x^{-3}).$$

Dann:

$$A(\mathbf{p}) \approx \frac{e^2}{2v} \int_0^{\Lambda/p} dx \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left( \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{x} \right) \rightarrow \frac{e^2}{4v} \ln \frac{\Lambda}{p}.$$