Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/2019

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Ludwig

Blatt 10
Besprechung 09.01.2019

---

1. Stoner Instabilität I: (30 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen sie die paramagnetische Suszeptibilität im Rahmen der phänomenologischen Landau Fermi-Flüssigkeitstheorie herleiten, und zeigen dass die Wechselwirkung zur ferromagnetischen sog. Stoner Instabilität führt.

In der Landau Fermiflüssigkeitstheorie wird die Korrektur der Energie der Quasiteilchen geschrieben als

$$\delta\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} f_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\delta n_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}'),$$

wobei über alle doppelt vorkommenden Indizes summiert wird. $\delta n_{\alpha\beta}$ ist eine Änderung der Teilchendichte. Das Landau-Funktional $f_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ hängt dabei von zwei Paaren von Spin-Indizes ab. Wir können diese Abhängigkeit explizit schreiben als

$$\nu_F f_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}') = F(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\delta},$$

wobei ν_F die Zustandsdichte an der Fermikante ist. F beschreibt eine spin-unabhängigen Anteil (diagonal im Spinraum), während G eine Spin-Spin-Wechselwirkung beschreibt (Skalarprodukt zweier Vektoren aus Paulimatrizen). Die Dichte der Quasiteilchen ist mit der Energie verbunden über

$$\hat{n} = \frac{1}{e^{(\hat{\epsilon}-\mu)/T} + 1},$$

wobei $\hat{n}$ und $\hat{\epsilon}$ nun beides Matrizen im Spinraum sind. Das bedeutet, dass im Rahmen dieser Theorie die Energie der Quasiteilchen von ihrer Dichte abhängt, die wiederum von der Energie abhängt...

(a) Betrachten sie das System in einen äusseren Magnetfeld. Es ergibt sich eine Korrektur der Energie nach dem Zeeman Effekt. Benutzen sie die Abhängigkeit zwischen $n_{\alpha\beta}$ und $\epsilon_{\alpha\beta}$ um eine selbstkonsistente Gleichung für die Änderung der Quasienergie zu erhalten.

(b) Lösen sie diese Gleichung unter der Annahme, dass die Änderung der Energie proportional zur Zeeman Energie ist.

(c) Benutzen sie obige Lösung um die Magnetisierung des Systems zu finden. Berechnen sie daraus die paramagnetische Suszeptibilität. Unter welchen Umständen divergiert die Suszeptibilität? Warum ist dies eine “ferromagnetische” Instabilität?

2. Stoner Instabilität II: (40 Punkte)

Betrachten Sie jetzt das System im ferromagnetischen Zustand. Jetzt zeichnet sich das System durch einer endlichen Magnetisierung aus. Nehmen Sie an, dass $\boldsymbol{m}$ den Einheitsvektor in Richtung der Magnetisierung ist. Die Energie eines Quasiteilchens hängt jetzt von der Orientirung des Spins des Teilchens bezüglich $\boldsymbol{m}$ ab:

$$\hat{\epsilon}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\sigma}) = \hat{\epsilon}_0(\boldsymbol{p}) - b(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}.$$

Wenn das Spin des Elektrons parallel zu $\boldsymbol{m}$ ist, dann hat das Elektron die Energie $\epsilon_0 - b$. Die entsprechende Verteilungsfunktion lautet $n^+ \equiv n_F(\epsilon_0 - b)$. Im Gegenteil, wenn das Spin antiparallel zu $\boldsymbol{m}$ ist, dann ist die Energie des Elektrons $\epsilon_0 + b$ mit der Verteilungsfunktion $n^- \equiv n_F(\epsilon_0 + b)$. Die beide Fälle kann man als einzige Matrix-Verteilungsfunktion schreiben:

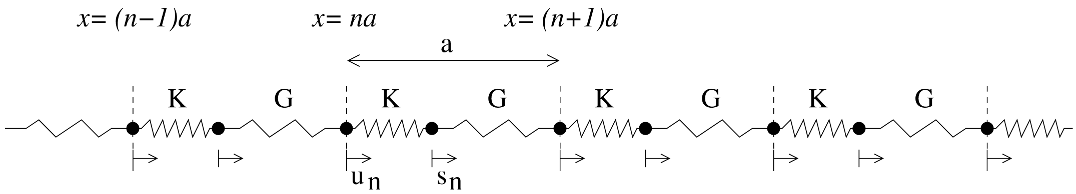
$$\hat{n}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{n^+ + n^-}{2} + \frac{n^+ - n^-}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}.$$

(a) Finden Sie die Beziehung zwischen die Funktionen $b(\boldsymbol{p})$ und $f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$.
Hinweis: Betrachten Sie die kleine Änderung der Energie des Elektrons angemessen zu einer kleiner Drehung des Vectors $\boldsymbol{m}$.

(b) Benutzen Sie das Ergebniss um das Kriterium für die Stoner-Instabilität herzuleiten.

3. Zweiatomige Harmonische Kette: (30 Punkte)

$2N$ identische Massen m können sich auf der x-Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden.



Mit den Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = na + d$ (Gitterkonstante a) lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(u_n, s_n, \dot{u}_n, \dot{s}_n) = T - U, \qquad U = \frac{K}{2}\sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2}\sum_n (u_{n+1} - s_n)^2.$$

(a) Man bestimme die Bewegungsgleichungen und löse diese über den Ansatz

$$u_n(t) = ue^{i(kx-\omega t)}, \qquad s_n(t) = se^{i(kx-\omega t)}, \qquad x = na,$$

für periodische Randbedingungen $u_{n+N} = u_n$, $s_{n+N} = s_n$.

(b) Wie lauten die Schwingungsmoden und -energien $\omega_1(k)$, $\omega_2(k)$ der Kette? Welche Einschränkung ergibt sich für die Wellenzahl k aus der Eindeutigkeit der Lösung $u_n(t)$, $s_n(t)$? Wie verläuft $\omega_{1,2}(k)$ für $ka \ll 1$?