Karlsruhe Institute for Technology

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/2019

Prof. Dr. A. Shnirman

PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Ludwig

Blatt 4

Besprechung 24.10.2018

---

1. Landauscher Diamagnetismus: (50 Punkte)

In dieser Übung betrachten Sie die diamagnetische Magnetisierung, die mit der Quantisierung der Bahnbewegung der Elektronen im Magnetfeld zusammenhängt. Üblicherweise beschreibt man das äußere Magnetfeld mit Hilfe des Vektorpotentials $\boldsymbol{A}$.

Der Hamilton-Operator für ein Band-Teilchen ohne Spin im Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ hat die Gestalt

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m^*}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2,$$

wobei m^* die effektive Bandmasse ist. Wir wählen die Richtung des Magnetfeldes als z-Achse, d.h. $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. Dann wählen wir die Eichung des Vektorpotentials als $\boldsymbol{A} = (-By, 0, 0)$.

Finden Sie jetzt die Energieniveaus:

(a) Verwenden Sie den folgenden Ansatz für die Wellenfunktion des Elektrons

$$\psi = \chi(y)\exp[i(p_x x + p_z z)].$$

Leiten Sie eine Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ (von der üblichen Schrödinger-Gleichung) her. (5 Punkte)

(b) Überprüfen Sie dass die Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ die Gestalt der Schrödinger-Gleichung für einen linearen harmonischen Oszillator hat. Bestimmen Sie die Energieniveaus des Elektrons – die sogenannten Landau-Niveaus. (5 Punkte)

(c) Bemerken Sie, dass die erhaltenen Energieniveaus entartet sind. Finden Sie den Entartungsgrad der Energieniveaus. (5 Punkte)

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Bewegung auf ein großes aber endliches Volumen $V = L_x L_y L_z$ beschränkt ist. Die Zahl der möglichen (nunmehr diskreten) Werte von p_x im Interval Δp_x ist $[L_z/(2\pi)]\Delta p_x$. Es sind aber nur die p_x-Werte zulässig, für die der Mittelpunkt y_0 innerhalb von der Fläche $S = L_x L_y$ in der $x - y$ Ebene liegt (hier vernachlässigen Sie den Bahnradius gegenüber dem großen L_y).

(d) Für ein ideales Elektrongas im äußeren Magnetfeld berechnen Sie das großkanonische Potential Ω als ein Integral über p_z und die Summe über die Landau-Niveaus, d.h. über n. (10 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie die Spinentartung!

(e) Vereinfachen Sie den Ausdruck für Ω: bemerken Sie, dass man bei jedem gegebenen Wert n das effektive chemische Potential einfüren kann. Leiten Sie den foldgenden Ausdruck her

$$\Omega = 2\mu_B B \sum_{n=0}^{\infty} f[\mu - (2n+1)\mu_B B], \quad \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc},$$

und finden Sie die Funktion $f(\mu)$ als ein Integral über p_z. (10 Punkte)

(f) Berechnen Sie die Summe über n mit Hilfe der bekannten Summationformel von Euler-McLaurin

$$\frac{1}{2}F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} F(a+n) \approx \int_a^{\infty} dx F(x) - \frac{1}{12}F'(a).$$

Bemerken Sie, dass das erhaltene Integral unabhängig vom Magnetfeld ist. Überprüfen Sie das Ergebniss (10 Punkte)

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}\mu_B^2 B^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2}.$$

(g) Finden Sie die diamagnetische Suszeptibilität. (5 Punkte)

2. Landau-Niveaus in Graphen: (50 Punkte)

Betrachten wir jetzt Dirac'sche Elektronen in Graphen. Wenn wir die beide Dirac-Punkte (K-Punkte) berücksichtigen, beschreiben wir die Quasi-Teilchen in Graphen mithilfe einer Bloch-Funktion mit 4 Komponenten:

$$\Phi = (\phi_{A,K_+}, \phi_{B,K_+}, \phi_{B,K_-}, \phi_{A,K_-}).$$

Hier $K_\pm$ bezeichnet die zwei Eckpunkte der Brillouin-Zone und $A(B)$ sind die zwei Untergitter. In diesem Basis lautet der effektive Hamilton-Operator eines Elektrons

$$\mathcal{H} = v_g \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{p},$$

wobei

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt das Elektron im äußeren Magnetfeld $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$). Verwenden Sie die minimale Kopplung

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}_{kin} = \boldsymbol{p} - (e/c)\boldsymbol{A} \quad ,$$

und benutzen Sie die übliche Eichung

$$\boldsymbol{A} = (-By, 0).$$

Finden Sie jetzt die Energieniveaus:

(a) In unseren Eichung sind die zwei Valleys ($K_\pm$) nicht gekoppelt. Betrachten Sie erst die Lösungen für das K_+-Valley. Hier koppelt die Schrödinger-Gleichung die zwei Komponenten ϕ_{A,K_+} und ϕ_{B,K_+}.

Schreiben Sie die entsprechende Gleichungen. Lösen Sie das Gleichungssystem und zeigen Sie, dass die Gleichung für jede einzelne Komponete genau der Oszillator-Gleichung entspricht. (30 Punkte)

(b) Benutzen Sie die bekannten Lösungen der Oszillator-Gleichung um die Landau-Niveaus in Graphen zu finden. Wie sind diese Niveaus entartet? (20 Punkte)

Hiweis Beachten Sie das besondere Verhalten an der Null-Energie.