Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

Prof. A. Mirlin

Dr. P. Schmitteckert, M. Schütt

Blatt 1

(irreguläre) Abgabe 15.04.11, 14:00

---

1. Greensche Funktion - 1-dim. Wärmeleitungsgleichung (5 Punkte)

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung lautet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T(t, x) = 0.$$

Hierbei ist $T(t, x)$ die Temperatur zur Zeit t am Ort x und λ die Temperaturleitfähigkeit. Eine zugehörige Greensche Funktion muss die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(t - t', x - x') = \delta(t - t')\delta(x - x') \tag{1}$$

erfüllen. Lösen sie diese Gleichung im Energie-Impulsraum und zeigen Sie explizit mit Hilfe einer Fouriertransformation und des Residuensatzes, dass

$$G(t, x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda t}} \theta(t) \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right)$$

gilt. Erläutern Sie, wie sich damit die Temperatur $T(t, x)$ für $t > 0$ berechnen lässt, wenn $T(0, x) = T_0(x)$ gegeben ist.

2. Greensche Funktion - Diffusion in d-dim. Gitter (10 Punkte)

Wir betrachten die Zufallsbewegung (Brownsche Bewegung) eines klassischen Teilchens auf einem d-dimensionalen, unendlich ausgedehnten, kubischen Gitter mit Gitterkonstante $a = 1$. Das Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Gitterpunkt $\boldsymbol{x} = (0, \ldots, 0)$ und bewegt sich mit Ablauf eines jeden diskreten Zeitintervalls $t \to t + 1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu einem der $2d$ benachbarten Gitterplätze.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Wahrscheinlichkeit P_0 zu berechnen, dass das Teilchen in der Zeitspanne von $t = 1$ bis $t = \infty$ niemals zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

(a) Es sei $p(t, \boldsymbol{x})$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen zum diskreten Zeitpunkt t am diskreten Ort $\boldsymbol{x}$ befindet. Desweiteren definieren wir die Fouriertransformierte

$$p(t, \boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{x}} e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} p(t, \boldsymbol{x})$$

sowie die generierende (oder Greensche) Funktion

$$G(\omega, \boldsymbol{q}) = \sum_{t \geq 0} e^{i\omega t} p(t, \boldsymbol{q}).$$

Zeigen Sie, dass für $|W(\boldsymbol{q})| < 1$ gilt:

$$G(\omega, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{1 - e^{i\omega} W(\boldsymbol{q})}, \quad \text{wobei } W(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{d}(\cos q_1 + \ldots \cos q_d).$$

Welche analytischen Eigenschaften hat $G(\omega, \boldsymbol{q})$ in diesem Fall als Funktion der komplexen Variablen ω? *(2 Punkte)*
Hinweis: Betrachten Sie die Änderung von $p(t, \boldsymbol{x})$ bei einem Zeitschritt.

(b) Geben Sie $G(\omega, \boldsymbol{q})$ im Grenzfall $\omega, |\boldsymbol{q}| \ll 1$ an und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Greenschen Funktion aus Aufgabe 1. Überlegen Sie sich, welche Gleichungen für die Form der Greenschen Funktionen verantwortlich sind und welchen Anfangsbedingungen diese genügen. *(1 Punkt)*

(c) Zeigen Sie, dass das Teilchen in der Zeitspanne $t = 1$ bis $t = \infty$ im Mittel $\langle N \rangle$-mal zum Ausgangspunkt zurückkehrt mit

$$\langle N \rangle = \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{W(\boldsymbol{q})^2}{1 - W(\boldsymbol{q})}.$$

Untersuchen Sie das Verhalten von $\langle N \rangle$ für $d \leq 2$, $d > 2$ und $d \to \infty$. (Für den letzten Fall kann es hilfreich sein, sich z.B. an den zentralen Grenzwertsatz für Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erinnern.) *(3 Punkte)*

Wir zeigen nun, dass

$$P_0 = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} \tag{2}$$

gilt, und bezeichnen dazu mit p_τ die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zum Zeitpunkt τ das erste Mal zurückkehrt.

(d) Drücken Sie in Abhängigkeit von p_τ die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass das Teilchen

(i) zur Zeit τ_1 das erste Mal und zur Zeit $\tau_1 + \tau_2$ das zweite (nicht notwendigerweise letzte) Mal zurückkehrt;

(ii) bis einschließlich zum Zeitpunkt t mindestens n-mal zurückgekehrt ist;

(iii) insgesamt, d. h. zur Zeit $t \to \infty$, mindestens n-mal zurückgekehrt ist. Im weiteren bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit $P_{\geq n}$.
(Überlegen Sie sich, warum diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $P_{\geq 1}$ dargestelt werden kann.)

(2 Punkte)

(e) Drücken Sie P_0 und $\langle N \rangle$ in Abhängigkeit von $P_{\geq 1}$ aus und beweisen Sie damit Gleichung (2)!
(2 Punkte)
Hinweis: Es ist vielleicht hilfreich die Wahrscheinlichkeit P_n zu bestimmen, dass das Teilchen insgesamt genau n-mal zurückkehrt.