Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

# Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

Prof. A. Mirlin

Dr. P. Schmitteckert, M. Schütt

**Blatt 10**

**Abgabe 24.06.11, 14:00**

---

**1. Temperaturabhängigkeit der Anregungslücke im Supraleiter** (14 Punkte)

Die Green'schen Funktionen für einen Supraleiter bei endlichen Temperaturen sind definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x,x') &= -\langle T_\tau \mathcal{S}\, \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\rangle\langle\mathcal{S}\rangle^{-1} = \quad \delta_{\alpha\beta}\mathcal{G}(x,x'),\\
\mathcal{F}_{\alpha\beta}(x,x') &= \quad \langle T_\tau \mathcal{S}\, \Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(x')\rangle\langle\mathcal{S}\rangle^{-1} = \quad g_{\alpha\beta}\mathcal{F}(x,x'),\\
\bar{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}(x,x') &= \quad \langle T_\tau \mathcal{S}\, \bar{\Psi}_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\rangle\langle\mathcal{S}\rangle^{-1} = -g_{\alpha\beta}\bar{\mathcal{F}}(x,x'),
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei $g_{11} = g_{22} = 0$, $g_{12} = -g_{21} = 1$ und $x \equiv (\tau, \boldsymbol{r})$. Der Hamilton-Operator des Systems lautet

$$H = \int d^3\boldsymbol{r} \left[ \bar{\Psi}_\alpha \left( -\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \Psi_\alpha + \frac{\lambda}{2} \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta \Psi_\beta \right], \tag{2}$$

mit $\lambda < 0$ für eine attraktive Wechselwirkung.

(a) Leiten Sie für die Funktionen (1) ein System gekoppelter Differentialgleichungen her. Nehmen Sie dabei ein unter Raum- und Zeittranslationen invariantes System an. Entkoppeln Sie die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Psi^4)$ und vernachlässigen Sie dabei Kontraktionen der Form $\langle T_\tau \mathcal{S}\, \bar{\Psi}_\gamma \Psi_\alpha\rangle\langle T_\tau \mathcal{S}\, \Psi_\gamma \bar{\Psi}_\beta\rangle$.

*Hinweis: Berechnen Sie zunächst $-\partial_\tau \Psi_\alpha$ und $-\partial_\tau \bar{\Psi}_\alpha$. Das Ergebnis lautet*

$$\begin{aligned}
\left( -\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) \mathcal{G}(x-x') + \Delta\, \bar{\mathcal{F}}(x-x') &= \delta(x-x'),\\
\left( \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) \bar{\mathcal{F}}(x-x') - \Delta^*\, \mathcal{G}(x-x') &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\Delta = |\lambda|\mathcal{F}(0)$ und $\Delta^* = |\lambda|\bar{\mathcal{F}}(0)$.

(b) Lösen Sie (3) und leiten Sie eine Konsistenzbedingung für die Bandlücke $\Delta$ her. Warum und wie sollte das Integrationsintervall für $\xi = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \mu$ begrenzt sein?
*Hinweis: Das Ergebnis lautet*

$$\frac{1}{|\lambda|\nu} = T \sum_{\epsilon_n} \int_{-\omega_{\mathrm{D}}}^{\omega_{\mathrm{D}}} d\xi\, \frac{1}{\epsilon_n^2 + \xi^2 + \Delta^2}, \tag{4}$$

wobei $\nu$ die Zustandsdichte an der Fermi-Kante bezeichnet.

(c) Bestimmen Sie das Temperaturverhalten der Bandlücke in der Nähe der Übergangstemperatur ($0 \ll T \lesssim T_\mathrm{c}$). Lösen Sie am Ende nach $\Delta$ auf und skizzieren Sie $\Delta(T)$.

*Hinweis: Entwickeln Sie (4) bis einschließlich $\mathcal{O}(\Delta^2)$. Der erste Term lässt sich mit Blatt 9, Aufgabe 1 in ein aus der Vorlesung bekanntes Integral umschreiben. Im zweiten Term kann die Integration über $(-\infty, \infty)$ ausgeführt werden (warum ist dies physikalisch gerechtfertigt?). Ein Zwischenergebnis lautet*

$$\ln \frac{T}{T_\mathrm{c}} = -\frac{7}{8} \frac{\zeta(3)}{\pi^2 T^2} \Delta^2, \quad T_\mathrm{c} = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_\mathrm{D}\, e^{-1/|\lambda|\nu}. \tag{5}$$

(d) Bestimmen Sie das Temperaturverhalten der Bandlücke für niedrige Temperaturen ($0 \lesssim T \ll T_\mathrm{c}$). Lösen Sie am Ende nach $\Delta$ auf und skizzieren Sie $\Delta(T)$.

*Hinweis: Führen Sie zunächst die Matsubara-Summe in (4) aus und verwenden Sie* $\tanh(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$. *Entwickeln Sie die Integranden für $\xi \ll \Delta$. Da $\Delta \ll \omega_D$ gilt, können Sie in einem der Integrale den Integrationsbereich ohne Konvergenzprobleme auf* $(0, \infty)$ *ausdehnen. Ein Zwischenergebnis lautet*

$$\ln \frac{\Delta}{\Delta_0} = -\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}}\, e^{-\Delta/T} \left(1 - \frac{T}{2\Delta}\right), \quad \Delta_0 = 2\,\omega_\mathrm{D}\, e^{-1/|\lambda|\nu}. \tag{6}$$

**2. Supraleitung aus der Sicht des Feldintegrals** (16 Punkte)

Wie wir in Aufgabe 3 von Blatt 9 gesehen haben, kann auch für komplexe Systeme, die sowohl fermionische als auch bosonische Freiheitsgrade besitzen, ein funktionales Feldintegral konstruiert werden. Im Folgenden möchten wir uns die Supraleitung genauer ansehen und dazu die Gleichung (4) von Aufgabe 1 reproduzieren um anschließend einige weiterführende Aspekte zu betrachten. Das System sei gegeben durch ($\psi = \psi(\vec{r}, \tau)$):

$$Z = \int \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) e^{-S[\bar{\psi}, \psi]}, \quad S[\bar{\psi}, \psi] = \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d r \left[ \bar{\psi}_\sigma \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi_\sigma - g \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow \right]. \tag{7}$$

(a) Erklären Sie die Form und das Vorzeichen der Wechselwirkung: $-g\bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow$

Als Erstens führen wir eine Hubbard-Stratonovich-Transformation durch, um die Vierpunkt-Wechselwirkung in eine quadratische Form zu überführen ($\Delta = \Delta(\vec{r}, \tau)$).

$$e^{g \int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d r\, \psi_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow} = \int \mathcal{D}(\bar{\Delta}, \Delta) e^{-\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d r \left[ \frac{|\Delta|^2}{g} - \left( \bar{\Delta} \psi_\downarrow \psi_\uparrow + \Delta \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \right) \right]} \tag{8}$$

(b) Zeigen Sie durch Ausintegrieren des $\Delta$-Feldes die Gültigkeit von Gleichung (8).
*Hinweis: $\mathcal{D}(\bar{\Delta}, \Delta)$ ist nicht das "gewöhnliche" bosonische Integralmaß*

Als nächstes führen wir den sogenannten Nambu-Spinor und die Gor'kov-Greensche Funktion ein:

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_\uparrow & \psi_\downarrow \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \bar{\psi}_\downarrow \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \Delta \\ \bar{\Delta} & -\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(c) Finden Sie mit Hilfe der Nambu-Spinoren und der Gor'kov-Greenschen Funktion (Gl.(9)) eine einfachere Darstellung von Gleichung (7) und integrieren Sie anschließend die fermionischen Felder aus.
*Hinweis: Sie sollten*

$$Z = \int \mathcal{D}(\bar{\Delta}, \Delta)\, e^{-\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d r \frac{|\Delta|^2}{g} + \mathrm{tr}\log \mathbb{G}^{-1}} \tag{10}$$

*als Ergebnis erhalten (*tr() *geht auch über* $\tau$ *und* $\vec{r}$*).*

Die im Weiteren diskutierte Physik wird sich auf Gleichung (10) stützen.

Die "Mean-field"-Theorie: Wir werden den Sattelpunkt der Wirkung von Gleichung (10) bestimmen unter der Annahme, dass $\Delta = \Delta_0$ konstant ist.

(d) Führen Sie eine Fouriertransformation der Wirkung von Gleichung (10) durch, wobei Sie den Operator $\mathbb{G}^{-1}$ analog zur Aufgabe 3c) ii) von Blatt 2 mit Hilfe einer Eigenwertgleichung transformieren können.

(e) Bestimmen Sie nun die Sattelpunktsgleichung. Was fällt ihnen auf? Begründen Sie.
*Hinweis: Sie sollte sehr große Ähnlichkeit mit Gleichung* (4) *haben.*

Ginzburg-Landau Theorie und spontane Symmetriebrechung: Wir werden den Logarithmus in Gleichung (10) entwickeln, um eine effektive Wirkung für $\Delta$ zu erhalten.

(g) Verwenden Sie die Dyson-Gleichung und zeigen Sie, dass:

$$\mathrm{tr}\log \mathbb{G}^{-1} = \text{const.} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \mathrm{tr}[(\mathbb{G}_0 \hat{\Delta})^{2n}] \quad \text{mit } \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \bar{\Delta} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbb{G}_0 = \mathbb{G}|_{\Delta=0}. \tag{11}$$

(h) Wir entwickeln die Spur bis zur Ordnung $n = 2$. Das Auswerten der Spur ist etwas aufwendig, aber nicht schwierig und sehr interessant! (Sie finden Details z.B. in `Condensed Matter Field Theory` von `Altland` und `Simons` in Kapitel 6.4). Verwenden Sie jedoch im Rahmen dieser Aufgabe:

$$\frac{|\Delta|^2}{g} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\mathbb{G}_0 \hat{\Delta})^2] \approx \frac{\nu_F}{2} \frac{T - T_c}{T_c} |\Delta|^2 = \frac{1}{2} r(T) |\Delta|^2 \tag{12}$$

$$\text{und } \mathrm{tr}[(\mathbb{G}_0 \hat{\Delta})^4] \approx -\text{const.} \times \rho_F T^{-3} |\Delta|^4 = -u|\Delta|^4. \tag{13}$$

Diskutieren Sie die effektive Wirkung, ihre physikalische Bedeutung, und gehen Sie auf Konsequenzen eines nicht verschwindenden Erwartungswertes für $|\Delta_0|^2$ ein.