Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

Prof. A. Mirlin
Dr. P. Schmitteckert, M. Schütt

Blatt 3
Abgabe 05.05.11, 14:00

---

1. Longitudinale Phononen und der Phonon-Propagator (20 Punkte)

Als einfachstes Modell für Phononen (Gitterschwingungen) im Kristallgitter betrachten wir longitudinale Schallwellen in einem isotropen, homogenen Medium. Die klassische Lagrange-Funktion dieser Anregungen ist gegeben durch

$$L = \int d^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{L}(\boldsymbol{r}), \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{2}\Big[(\partial_t q)^2 - c^2(\nabla q)^2\Big],$$

wobei $q(\boldsymbol{r},t)$ die Auslenkung des Mediums von der Ruhelage in Richtung des Wellenvektors $\boldsymbol{k}$ am Punkt $\boldsymbol{r}$ beschreibt. Die Konstanten ρ_0 und c bezeichnen die mittlere Dichte des Mediums und die Schallgeschwindigkeit.

(a) Stellen Sie die klassische Bewegungsgleichung für das Feld $q(\boldsymbol{r},t)$ auf.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung einer klassischen Feldtheorie folgende Form hat:

$$\partial_t \frac{\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{r},t)}{\delta(\partial_t q(\boldsymbol{r},t))} + \nabla\frac{\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{r},t)}{\delta(\nabla q(\boldsymbol{r},t))} - \frac{\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{r},t)}{\delta q(\boldsymbol{r},t)} = 0.$$

(b) Lösen Sie die klassische Bewegungsgeichung durch Fouriertransformationen im Raum und in der Zeit. Zeigen Sie, dass die Schallwellen der linearen Dispersion $\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$ genügen.

(c) Berechnen Sie das zum Feld $q(\boldsymbol{r},t)$ kanonisch konjugierte "Impulsfeld"

$$p(\boldsymbol{r},t) \equiv \frac{\delta L}{\delta(\partial_t q(\boldsymbol{r},t))}.$$

Welcher physikalischen Größe entspricht dieses Feld?

(d) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion des klassischen Systems. Zeigen Sie, dass sich diese als eine Summe über Moden $\boldsymbol{k}$ darstellen lässt, welche jeweils einem harmonischen Oszillator mit Frequenz $\omega_{\boldsymbol{k}}$ entsprechen.

Es gilt nun, diese Schallwellen zu quantisieren. Die klassischen Felder $q(\boldsymbol{r},t)$ und $p(\boldsymbol{r},t)$ werden hierbei durch Operatoren ersetzt, die der kanonischen Vertauschungsregel

$$[\hat{q}(\boldsymbol{r},t), \hat{p}(\boldsymbol{r}',t)] = i\hbar\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

genügen. Im Folgenden sei $\hbar = 1$. Die Quantisierung lässt sich technisch bewerkstelligen, indem die Quantenfelder $\hat{q}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{p}(\boldsymbol{r},t)$ durch geeignete Kombinationen von bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dargestellt werden.

(e) Begründen Sie: Müssen die Operatoren $\hat{q}$ und $\hat{p}$ hermitisch sein?

(f) In Analogie an die Quantisierung des linearen harmonischen Oszillators wählt man den folgenden Ansatz für $\hat{q}(\boldsymbol{r},t)$ in Heisenberg-Darstellung:

$$\hat{q}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{k}} \Big[b_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-i\omega_{\boldsymbol{k}}t} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}+i\omega_{\boldsymbol{k}}t} \Big].$$

Inwiefern besteht eine Analogie zum harmonischen Oszillator? Wodurch ist diese Analogie gerechtfertigt? Bestimmen Sie die Koeffizienten $A_{\boldsymbol{k}}$.

Hinweis: Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil (c) sowie den Kommutator (1).

(g) Drücken Sie den Hamilton-Operator des quantisierten Systems durch $b_{\boldsymbol{k}}$ und $b_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ aus.

(h) Überzeugen Sie sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho(\boldsymbol{r},t) + \rho_0 \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = 0$, dass das Phononfeld, üblicherweise durch

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t) \equiv \sum_{\boldsymbol{k}} i \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2V}} \Big[b_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-i\omega_{\boldsymbol{k}}t} - b_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}+i\omega_{\boldsymbol{k}}t} \Big] \tag{2}$$

dargestellt, proportional zur Abweichung der Dichte $\rho(\boldsymbol{r},t)$ von der mittleren Dichte ρ_0 des Mediums ist und geben Sie die Proportionalitätskonstante an.

Die Greensche Funktion eines unter Raum- und Zeittranslationen invarianten Systems nicht wechselwirkender Phononen ist definiert durch

$$D(\boldsymbol{r},t) = -i \langle \Phi_0 | \mathrm{T}\, \hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t)\, \hat{\varphi}(\boldsymbol{0},0) | \Phi_0 \rangle\,, \tag{3}$$

wobei T das chronologische Produkt (“latest to the left”) und $\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t)$ das in (2) definierte Phononfeld bezeichnet.

(j) Welche der bosonischen Phononenzustände sind im Grundzustand $|\Phi_0\rangle$ bei Temperatur $T{=}0$ besetzt?

(k) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $D(\boldsymbol{k},\omega)$ durch explizites Einsetzen der Phononenfelder.

2. Bogoliubov-Transformation (10 Punkte)

(a) Wir betrachten den Hamilton-Operator $H = \epsilon_1 c_1^\dagger c_1 + \epsilon_2 c_2^\dagger c_2 + \Delta c_2 c_1 + \Delta^* c_1^\dagger c_2^\dagger$ und die durch die komplexe 2×2-Matrix T definierte Bogoliubov-Transformation

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2^\dagger \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v* \\ -v & u* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \end{pmatrix}$$

der fermionischen Vernichtungsoperatoren c_1, c_2 mit $\det T = |u|^2 + |v|^2 = 1$.

i) Zeigen Sie: Auch $a_{1,2}$ genügen den fermionischen Antivertauschungsrelationen.

ii) Bestimmen Sie eine unitäre Transformation T, die H diagonalisiert, d. h. in die Form

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \text{reelle Konstante}$$

bringt, und geben Sie ω_1, ω_2 an.

Hinweis: Bringen Sie H zunächst in die Form

$$H = \begin{pmatrix} c_1^\dagger & c_2 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \end{pmatrix} + \text{reelle Konstante.}$$

und diagonalisieren Sie die Matrix K.

(b) Diagonalisieren Sie H für den Fall, dass c_1, c_2 (und a_1, a_2) bosonische Vernichtungsoperatoren sind. Warum sind die Transformationen T nun pseudounitär, d. h. $T^\dagger \sigma_3 T = \sigma_3$?