Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

Prof. A. Mirlin

Dr. P. Schmitteckert, M. Schütt

Blatt 4

Abgabe 12.05.11, 14:00

---

1. Wick'sches Theorem (6 Punkte)

Das Wick'sche Theorem besagt, dass sich das chronologische Produkt von n Operatoren $T[\hat{O}_1\hat{O}_2\ldots\hat{O}_n]$ darstellen lässt als die Summe der normalgeordneten Produkte $:\hat{O}_1\hat{O}_2\ldots\hat{O}_n:$ ohne und mit allen möglichen paarweisen Kontraktionen der Operatoren. Die Kontraktion zweier Operatoren ist definiert durch $T[\hat{O}_1\hat{O}_2] - :\hat{O}_1\hat{O}_2:$.

(a) Zeigen Sie unter der Annahme, dass die Operatoren $\hat{O}_i$ linear in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind, dass die Kontraktion eine Zahl und kein Operator ist.

(b) Ist diese Annahme für die Gültigkeit des Wick'sche Theorem notwendig?

(c) Würde das Wick'sche Theorem auch gelten, wenn wir das chronologische Produkt im Theorem als auch in der Definition der Kontraktion durch ein die Operatoren bezüglich ihrer Koordinate entlang der x–Achse ordnendes Produkt ersetzen würden?

2. Der Heisenberg-Magnet (24 Punkte)

Der eindimensionale Heisenberg-Magnet mit nächster-Nachbar-Kopplung wird durch den Hamilton-Operator

$$H = -\sum_{j=1}^{N}\left(J_x S_j^x S_{j+1}^x + J_y S_j^y S_{j+1}^y + J_z S_j^z S_{j+1}^z\right) \qquad (1)$$

beschrieben. Wir berechnen das Anregungsspektrum, indem wir, je nach Grenzfall, die Spinoperatoren durch fermionische oder bosonische Operatoren ausdrücken.

a) **Die Jordan-Wigner-Transformation** Ein lokalisierter Elektronspin lässt sich durch einen unbesetzten oder einfach besetzten Fermionenzustand darstellen:

$$|\uparrow\rangle \equiv c^\dagger|0\rangle\,, \quad |\downarrow\rangle \equiv |0\rangle\,.$$

Für die Spinoperatoren ergibt sich

$$S^+ = S^x + iS^y = c^\dagger, \quad S^- = S^x - iS^y = c, \quad S^z = c^\dagger c - \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

- Überzeugen Sie sich, dass die in (2) definierten Spinoperatoren der SU(2)-Spinalgebra $\left[S^a, S^b\right] = i\epsilon^{abc}S^c$ genügen.

Das Problem mit dieser Darstellung ist, dass die Fermion-Operatoren auf verschiedenen Gitterplätzen j Antikommutationsregeln genügen, die Spinoperatoren jedoch kommutieren müssten. Um dieses Problem zu umgehen, führten Jordan und Wigner sogenannte *String*-Operatoren ein ($n_i = c_i^\dagger c_i$):

$$S_j^+ = c_j^\dagger \exp\left(i\pi\sum_{i<j} n_i\right), \quad S_j^- = c_j \exp\left(i\pi \textstyle\sum_{i<j} n_i\right), \quad S_j^z = c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2}.$$

- Zeigen Sie, dass die Spinoperatoren auf verschiedenen Gitterplätzen j und k nun vertauschen, d.h. $\left[S_j^{\pm}, S_k^{\pm}\right] = 0$. Überlegen Sie sich außerdem wie dieser String-Operator funktioniert und wann eine solche Konstruktion möglich ist.*Hinweis: Berechnen Sie zunächst* $\{e^{i\pi n_j}, c_j^\dagger\}$
- Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator (1) mit Hilfe einer Jordan-Wigner-Transformation in der Form

$$H = -\sum_j \Big\{ t\big(c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.\big) + \Delta\big(c_j c_{j+1} + h.c.\big) + J_z\big(n_j - \tfrac{1}{2}\big)\big(n_{j+1} - \tfrac{1}{2}\big) \Big\}$$

  geschrieben werden kann, wobei "*h.c.*" das hermitesch Konjugierte des vorhergehenden Terms bedeutet und geben Sie t und Δ an.

Betrachten Sie im Folgenden den Spezialfall $J_z = 0$ (auch XY-Modell genannt).

- Nehmen Sie ein (direktes) Gitter aus $N \gg 1$ Gitterpunkten $R_j = aj$, $j = 1, \ldots, N$, im Abstand a sowie periodische Randbedingungen an. Die Brillouin-Zone enthält somit N Impulse $-\pi/a \leq q \leq \pi/a$, für die

$$\frac{1}{N}\sum_q e^{iq(R_i - R_j)} = \delta_{ij}, \qquad \frac{1}{N}\sum_i e^{-i(p-q)R_i} = \delta_{pq}$$

  gilt. Transformieren Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren vom Ortsraum in den Impulsraum,

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_q c_q e^{iqR_j}, \quad c_q = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j c_j e^{-iqR_j}. \tag{3}$$

  Diagonalisieren Sie H mit Hilfe einer geeigneten Bogoliubov-Transformation.
- Bestimmen und skizzieren Sie das Spektrum der Anregungen. Gehen Sie insbesondere auf die Spezialfälle $J_x = J_y$ und $J_y = 0$ ein.

b) **Holstein-Primakoff-Transformation**: Wir betrachten den Ferromagneten für den Fall: $J_z \geq J_x \geq J_y \geq 0$ und nehmen an, dass sich das System in demjenigen Grundzustand befindet, in dem alle lokalen Spins in negativer z-Richtung orientiert sind, $\langle S_j^z\rangle_0 = -S$, $\langle S_j^x\rangle_0 = \langle S_j^y\rangle_0 = 0$. Wir verwenden die Holstein-Primakoff-Transformation von Blatt 2 Aufgabe 2.

- Wir betrachten niederenergetische Anregungen, $\left|\langle a_j^\dagger a_j\rangle\right| \ll S$, für die wir die Näherung

$$S_j^+ = \sqrt{2S}a_j^\dagger, \qquad S_j^- = \sqrt{2S}a_j, \qquad S_j^z = a_j^\dagger a_j - S \tag{4}$$

  benutzen. Setzen Sie (4) in den Hamilton-Operator (1) ein. Vernachlässigen Sie diejenigen Terme, welche nicht von S abhängen, führen Sie eine zu (3) analoge Transformation in den Impulsraum durch und bestimmen Sie die Anregungsenergien durch eine Bogoliubov-Transformation. Betrachten Sie die Fälle $J_x = J_y = J_z$, $J_z = J_x$ mit $J_y = 0$ und $J_x = 0 = J_y$.

c) **Diskussion**: Was bedeuten die zwei Spezialfälle aus a) und die drei Fälle aus b)? Vergleichen Sie außerdem die Ergebnisse aus a) mit b), wo es möglich ist.