

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

PROF. A. MIRLIN

Blatt 6

DR. P. SCHMITTECKERT, M. SCHÜTT

Abgabe 26.05.11, 14:00**1. Grundzustandsenergie und Cluster-Expansion** (10 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Vielteilchensystems sei gegeben durch

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H}_0 + \hat{V}(\lambda),$$

wobei der Parameter λ zum adiabatischen Einschalten der Wechselwirkung verwendet werden soll: $\hat{V}(\lambda) \equiv \lambda \hat{V}$. Es gilt, aus der Entwicklung der Wechselwirkungsenergie

$$\langle \phi(\lambda) | \hat{V}(\lambda) | \phi(\lambda) \rangle = \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \lambda^3 V_3 + \dots \quad (1)$$

nach Potenzen von λ , wobei $|\phi(\lambda)\rangle$ den exakten Grundzustand von $\hat{H}(\lambda)$ bezeichnet, eine Entwicklung für die durch die Wechselwirkung verursachte Änderung der Grundzustandsenergie ΔE zu bestimmen.

- (a) Überlegen Sie sich zunächst, warum ΔE nicht einfach durch (1) gegeben ist.
(b) Bestimmen Sie die Änderung ΔF der freien Energie

$$F(\lambda) = -T \ln Z, \quad \text{wobei} \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}(\lambda)}], \quad \beta = \frac{1}{T}$$

während des Einschaltvorganges ($\lambda : 0 \rightarrow 1$), indem Sie $F(\lambda)$ zunächst nach λ differenzieren, und dann integrieren.

- (c) Bestimmen Sie schließlich ΔE aus ΔF und (1).
(d) Überlegen Sie sich, ob und, wenn ja, wie wir diese Entwicklung auch ohne den Umweg über endliche Temperaturen erhalten könnten.

2. Korrektur der Grundzustandsenergie in 2. Ordnung

(20 Punkte)

Es gilt, die Korrektur der Grundzustandsenergie eines fast idealen Fermi-Gases durch die Wechselwirkung in 2. Ordnung zu berechnen.

- Zeichnen Sie zunächst alle Vakuum-Diagramme 2. Ordnung. Zeigen Sie, dass sich drei dieser Diagramme auf die 1. Ordnung zurückführen lassen, indem man die Green'sche Funktion G_0 des nichtwechselwirkenden Systems durch die Green'sche Funktion G des wechselwirkenden Systems ersetzt.
- Geben Sie die von den beiden verbleibenden Diagrammen herrührende Energiekorrektur $\Delta E^{(2)}$ unter Verwendung der Feynman-Regeln in Integralform an und führen Sie dann die Energie-Integrationen über ϵ , ϵ' und ω aus.

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\frac{\Delta E^{(2)}}{\text{Vol.}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} \frac{(\Theta(\epsilon_{\mathbf{k}}) - \Theta(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}))(\Theta(\epsilon_{\mathbf{k}'}) - \Theta(\epsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}))}{\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}} \cdot (\Theta(\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}) - \Theta(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})) V(\mathbf{q}) (V(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q}) - 2V(\mathbf{q})) \quad (2)$$

wobei $\epsilon_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu$.

- Zeigen Sie, dass die \mathbf{k}, \mathbf{k}' -Integrationen durch die Θ -Funktionen effektiv auf den Bereich

$$\begin{aligned} |\mathbf{k} + \mathbf{q}| < p_{\text{F}} < |\mathbf{k}| \quad \text{und} \\ |\mathbf{k}' - \mathbf{q}| < p_{\text{F}} < |\mathbf{k}'| \end{aligned} \quad (3)$$

beschränkt werden können. Welche Größenordnung haben diese Integrationsintervalle im Vergleich zu $q \equiv |\mathbf{q}|$? Welche physikalischen Prozesse wählen diese Bedingungen aus?

Im Folgenden soll nun die Coulomb-Wechselwirkung betrachtet werden:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}|} \quad \text{bzw.} \quad V(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2}. \quad (4)$$

- Nähern Sie den Integranden in (2) für kleine q . Zeigen Sie, dass der erste Term für $q \rightarrow 0$ konvergent ist, während der zweite Term im Infraroten (d.h. bei kleinen q) divergent ist.
- Wie lässt sich diese Divergenz physikalisch verstehen? Welche falsche Annahme oder Näherung geht in die Rechnung ein?
- Welche weiteren Diagramme müssten berücksichtigt werden, um die Divergenz des einen Diagramms zu kürzen? Zeigen Sie, dass eine geeignete Reihe von Diagrammen, die das obige divergente Diagramm enthält, zu einer endlichen Korrektur der Grundzustandsenergie führt.

Hinweis: Sie können die Cluster-Expansion aus Aufgabe 1 verwenden.

- Überlegen Sie sich, warum Sie nicht die richtige Korrektur der Grundzustandsenergie erhalten, wenn Sie in dem divergenten Diagramm 2. Ordnung eine Coulomb-Wechselwirkungslinie durch eine mittels RPA berechnete, abgeschirmte Linie ersetzen.