Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

PROF. A. MIRLIN

DR. P. SCHMITTECKERT, M. SCHÜTT

Blatt 7

Abgabe 03.06.11, 14:00

---

1. Selbstenergiekorrektur durch Phononen (30 Punkte)

Der Hamiltonian für die Wechselwirkung von Leitungselektronen mit longitudinalen Phononen ist gegeben durch

$$\hat{H}_{\text{int}} = g \int d^3\boldsymbol{r}\, \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r})\hat{\varphi}(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

wobei $\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t)$ das auf Blatt 3 eingeführte Phononfeld bezeichnet. Die Green'sche Funktion dieses Feldes ist gegeben durch

$$D(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega^2 - \omega_{\boldsymbol{k}}^2 + i0}, \tag{2}$$

wobei $\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$ (vgl. Blatt 3, Aufgabe 1). Es gilt, die durch die Wechselwirkung der Elektronen mit den Phononen verursachte Selbstenergiekorrektur $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ in führender Ordnung in g zu berechnen.

(a) Formulieren Sie die Feynman-Regeln für das Elektron-Phonon-System im Impulsraum.

Hinweis: Entwickeln Sie zunächst in Analogie zur Vorlesung die Green'sche Funktion im Ortsraum in führender Ordnung im Wechselwirkungsparameter g. Leiten Sie daraus die Feynman-Regeln im Orts- und Impulsraum ab.

(b) Für die Selbstenergie $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ ergeben sich in führender Ordnung in g zunächst zwei Diagramme. Zeichnen Sie diese Diagramme. Begründen Sie, warum eines dieser Diagramme physikalisch irrelevant ist und somit keinen Beitrag zu $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ leistet.

Im Weiteren soll nur das physikalisch relevante Diagramm betrachtet werden.

(c) Geben Sie $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ mit Hilfe der Feynman-Regeln in Integralform an und führen Sie die Energieintegration der Schleife aus.

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon) = \frac{g^2 c}{16\pi^3}\int d^3\boldsymbol{k}\, k \left\{ \frac{\theta(-\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})}{\epsilon + ck - \epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} - i0} + \frac{\theta(\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})}{\epsilon - ck - \epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} + i0} \right\} \tag{3}$$

wobei $\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} \equiv \frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2}{2m} - \mu$.

Der Debye-Wellenvektor k_{D} ist definiert als der Radius der Kugel im reziproken Raum, die genau so viele Zustände enthält, wie es longitudinale Phononmoden gibt. Die Debye-Frequenz ist definiert durch $\omega_{\mathrm{D}} = ck_{\mathrm{D}}$.

(d) Wieviele solche Moden gibt es in einem einfach kubischen Kristallgitter mit N Atomen? Bestimmen Sie k_D als Funktion der Atomdichte N/V. Vergleichen Sie die Größenordnung von k_D mit der des Fermi-Wellenvektors k_F. Überlegen Sie sich, warum die $\boldsymbol{k}$-Integration in (3) auf eine Kugel $|\boldsymbol{k}| < k_\mathrm{D}$ begrenzt werden muss.

Der Integrand in (3) hängt sowohl vom Betrag $k \equiv |\boldsymbol{k}|$ als auch über $\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}$ vom Winkel ϑ zwischen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{p}$ ab. Es empfiehlt sich, die Winkelintegration innerhalb der k-Integration (also bei gegebem Wert von k) in eine Integration über den Parameter $\xi \equiv \epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}$ umzuschreiben. Im Weiteren wollen wir $\mathrm{Im}\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ für $\epsilon \ll \epsilon_\mathrm{F}$, $p \equiv |\boldsymbol{p}| \approx p_\mathrm{F}$ betrachten.

(e) Schreiben Sie die Winkelintegration in eine Integration über ξ um und bestimmen Sie die Integralgrenzen ξ_min und ξ_max.

(f) Geben Sie zunächst einen exakten Ausdruck für den Imaginärteil von $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ an. Überlegen Sie sich, warum wir näherungsweise die Integralgrenzen für ξ auf $-\infty$ bis ∞ aufweiten dürfen und berechnen Sie $\mathrm{Im}\Sigma(\epsilon)$ in dieser Näherung.

Hinweis: Die Schallgeschwindigkeit c ist in Metallen um einen Faktor der Größenordnung 10^2 kleiner als die Fermigeschwindigkeit v_F.

(g) Begründen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Rechnung physikalisch, warum $\mathrm{Im}\Sigma(\epsilon)$ für kleine ϵ proportional zu ϵ^3 ist. Steht dieses Ergebnis im Einklang mit Landau's Fermiflüssigkeits-Hypothese?

Es gilt nun, den Realteil von $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ zu untersuchen.

(h) Führen Sie zunächst die ξ-Integration aus.

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\mathrm{Re}\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon) = \frac{g^2 cm}{8\pi^2 p}\int_0^{k_\mathrm{D}} k^2 dk\, I(k), \quad I(k) = \ln\left|\frac{\epsilon - ck}{\epsilon + ck}\right| + \ln\left|\frac{\epsilon + ck - \xi_\mathrm{min}}{\epsilon - ck - \xi_\mathrm{max}}\right|. \tag{4}$$

Da der zweite Term in $I(k)$ die Parameter v_F und μ nur geringfügig renormalisiert, wollen wir ihn im Folgenden nicht weiter betrachten.

(i) Bestimmen Sie den verbleibenden, so genannten anomalen Beitrag zur Selbstenergie in den beiden Grenzfällen $\epsilon \ll \omega_\mathrm{D}$ und $\epsilon \gg \omega_\mathrm{D}$ für $p \approx p_\mathrm{F}$. Skizzieren Sie $\mathrm{Re}\Sigma(\epsilon)$ als Funktion von ϵ.

(j) Geben Sie mit Hilfe von $\Sigma(\epsilon)$ den Quasiteilchenbeitrag zur Green'schen Funktion des Elektrons an. Bestimmen Sie insbesondere Z_p und die effektive Masse m^* sowie die Zerfallsrate $\gamma(\epsilon)$. Wird die effektive Masse des Elektrons durch die Wechselwirkung mit den Phononen kleiner oder größer? Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch verstehen?

(k) Überlegen Sie sich, aus welchem physikalischen Grund die Phononen-Selbstenergie nur ganz schwach vom Elektronimpuls p abhängen.

(l) Überlegen Sie sich, warum man die in die Berechnung von $\mathrm{Re}\Sigma(\epsilon)$ eingehenden Phononen als "virtuell" und die in die Berechnung von $\mathrm{Im}\Sigma(\epsilon)$ eingehenden Phononen als "reell" bezeichnet.

Hinweis: Ein "reelles" Teilchen genügt der entsprechenden Energie-Impuls Beziehung, während Energie und Impuls für "virtuelle" Teilchen in keinem Zusammenhang stehen.