Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

Prof. A. Mirlin
Dr. P. Schmitteckert, M. Schütt

Blatt 8
Abgabe 09.06.11, 14:00

---

1. Kompressibilität eines zweidimensionalen Elektronensystems (20 Punkte)

Die Kompressibilität beschreibt die relative Volumenänderung des Systems als Antwort auf eine Änderung des Drucks $K = -V^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_N$.

(a) Zeigen sie mit Hilfe der thermodynamischen Potentiale und unter Verwendung von $U = E = N\epsilon_0$ (ϵ_0 ist mittlere Energie pro Teilchen) und $V\rho = N$, dass

$$K^{-1} = \rho^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\rho\epsilon_0(\rho) \tag{1}$$

gilt.

Im nächsten Schritt werden wir die Dichte und Energie eines wechselwirkungsfreien zweidimensionalen Systems in Abhängigkeit von p_F bestimmen.

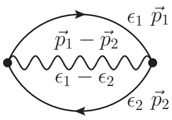
(b) Bestätigen Sie die Gültigkeit von

$$\epsilon_0 = \frac{\pi}{2}\frac{\rho}{m}. \tag{2}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie diese Größen im Rahmen der statistischen Mechanik bestimmt wurden und betrachten Sie anschließend den Limes $T \to 0$.

Wenden wir uns nun dem wechselwirkenden System zu. Unser Ziel ist es, die Energiekorrektur des Fock-Diagramms zu bestimmen. Also

$$\frac{E_{\text{Fock}}}{V} = i \tag{3}$$



(c) Bestimmen Sie zunächst das Coulomb Potenzial ($\frac{e^2}{r}$) in Impulsdarstellung.
Hinweis: Ihr Ergebnis sollte in 2D $V(q) = \frac{2\pi e^2}{q}$ lauten.

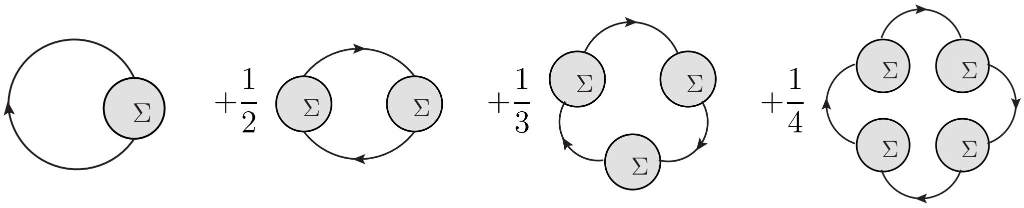
(d) Berechnen Sie nun die Energiekorrektur des Fock-Diagramms. Rekapitulieren Sie hierfür wie Green'sche Funktionen zu gleichen Zeiten ausgewertet werden müssen.
Hinweis: $2\int_0^1 \mathrm{d}x\, x \int_{1-x}^{1+x} \mathrm{d}y \arccos\left(\frac{x^2+y^2-1}{2xy}\right) = (8-\pi)/3$

(e) Ermitteln Sie die Kompressibilität des Systems unter Berücksichtigung der Fock-Korrektur. Was fällt Ihnen auf? Interpretieren Sie das Ergebnis ($K^{-1} \propto [1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} r_s]$).
Hinweis: Verwenden Sie für die Darstellung des Endergebnisses $\pi(a_0 r_s)^2 = \rho^{-1}$ (a_0 ist der Bohrradius). Dann ist r_s der dimensionslose Radius, in dem sich (im Mittel) eine Ladung befindet.

Nähere Informationen zur Messbarkeit der Kompressibilität zweidimensionaler Systeme finden Sie bei J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer und K.W. West in Phys. Rev. Lett. **68**, 674677 (1992) oder Phys. Rev. B **50**, 17601778 (1994).

2. Green'sche Funktion und großkanonisches Potential (10 Punkte)

Wir betrachten ein wechselwirkendes Fermi-System, für das die wichtigsten Diagramme Selbstenergiediagramme sind, während kompliziertere Diagramme, wie z. B. Vertexkorrekturen, vernachlässigbar sind. (Eine solche Situation liegt bei Elektron-Phonon-Wechselwirkung in Metallen vor.) In diesem Fall ist die Korrektur $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$ zum großkanonischen Potential durch die folgende Reihe von Diagrammen gegeben:



$+\ldots$ (4)

(a) Zeigen Sie, dass sich $\Delta\Omega$ wie folgt durch die volle Green'sche Funktion

$$G(\epsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\epsilon_n - \xi(\mathbf{p}) - \Sigma(\epsilon_n, \mathbf{p})} \tag{5}$$

ausdrücken lässt:

$$\Delta\Omega = T \sum_{n,\mathbf{p},\alpha} e^{i\epsilon_n \tau} \ln \frac{G(\epsilon_n, \mathbf{p})}{G_0(\epsilon_n, \mathbf{p})}, \qquad \tau \to 0. \tag{6}$$

(b) (Entropie und spezifische Wärme) Gleichung (6) lässt sich auswerten, indem die Summe über Matsubara-Frequenzen in ein Integral über reelle Frequenzen umgewandelt wird. Verwenden Sie dazu die Beziehung

$$T \sum_n f(i\epsilon_n) = \frac{1}{4\pi i} \oint_C \tanh \frac{\epsilon}{2T} f(\epsilon) d\epsilon \qquad (\epsilon_n = \pi T(2n+1)), \tag{7}$$

wobei der Integrationsweg C die imaginäre Achse und damit die Pole der Funktion $\tanh \frac{\epsilon}{2T}$ umschliesst.

Finden Sie für niedrige Temperaturen $T \ll \omega_D$ den T-linearen Beitrag zur spezifischen Wärme $c_V = -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \Omega$ des Metalles. In diesem Fall ist die Selbstenergie $\Sigma(\epsilon_n, \mathbf{p})$ unabhängig von $\mathbf{p}$ und hat die Form $\Sigma(\epsilon_n) = -ib\,\epsilon_n$.