Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

Prof. A. Mirlin
Dr. P. Schmitteckert, M. Schütt

Blatt 9
Abgabe 20.06.11, 11:30

---

1. Matsubara-Summe (5 Punkte)

Berechnen Sie die Summe

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\epsilon_n}\frac{1}{\epsilon_n^2+a^2} \tag{1}$$

für sowohl fermionische als auch bosonische Matsubara-Frequenzen.

Hinweis: Das Ergebnis für bosonische Frequenzen lautet

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^2+a^2}=\frac{1}{2a}\coth\frac{\beta a}{2}. \tag{2}$$

2. Analytische Eigenschaften der Green'schen Funktion (10 Punkte)

Eine geschickte Methode, um Matsubara-Diagramme auszuwerten, macht sich die analytischen Eigenschaften der Green'schen Funktion zu Nutze. Mit dieser Methode lässt sich in jedem Diagramm die explizite Summation über Matsubara-Frequenzen durchführen. Betrachten Sie als Beispiel die Elektron-Selbstenergie durch Phonon-Wechselwirkung in zweiter Ordnung,

$$\Sigma(\epsilon_n,\mathbf{p})=-g^2T\sum_{\omega_m}\int G(\epsilon_n-\omega_m,\mathbf{p}-\mathbf{q})D(\omega_m,\mathbf{q})\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}. \tag{3}$$

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Beziehung

$$G(\epsilon_n,\mathbf{p})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}G_R(\epsilon,\mathbf{p})}{\epsilon-i\epsilon_n}\,d\epsilon \tag{4}$$

zwischen Matsubara- und retardierter Green'scher Funktion die Darstellung

$$\begin{aligned}\Sigma(\epsilon_n,\mathbf{p}) &= \frac{g^2}{2\pi^2}\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d\epsilon(\tanh\frac{\epsilon}{2T}+\coth\frac{\omega}{2T}) \\ &\times\ \frac{\mathrm{Im}G_R(\epsilon',\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\mathrm{Im}D_R(\omega,\mathbf{q})}{i\epsilon_n-\epsilon-\omega},\end{aligned} \tag{5}$$

her, in der die Integration über reelle ϵ' und ω durchzuführen ist. Wie sieht diese Gleichung für die retardierte Selbstenergie aus?
Hinweis: Überlegen Sie sich, was die Konsequenz aus Gl.(4) *ist.*

(b) Betrachten Sie nun die inverse Lebenszeit des Elektrons, welche proportional zu $\mathrm{Im}\Sigma_R(\epsilon,\mathbf{p})$ ist. Welche Frequenzen ω tragen hauptsächlich zu Gleichung (5) bei? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

3. Die Zustandssumme als funktionales Feldintegral (15 Punkte)

Auf Blatt 5 haben Sie in Aufgabe 3 gezeigt, dass mit Hilfe von bosonischen kohärenten Zuständen die Konstruktion eines funktionalen Feldintegrals möglich ist. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass dies auch für Fermionen möglich ist, und es soll eine Darstellung der Zustandssumme durch ein funktionales Feldintegral konstruiert werden.

Grassmann Variablen bilden eine Algebra, die sich hervorragend zur Beschreibung fermionischer Zustände eignet.

$$\eta_i\eta_j = -\eta_j\eta_i, \qquad \{\hat{c}_i, \eta_j\} = 0, \qquad \partial_{\eta_i}\eta_j = \delta_{i,j}, \qquad \int \mathrm{d}\eta_i\, \eta_i^n = n \quad n \in \{0,1\} \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie: $f(\eta_i) = f(0) + f'(0)\eta_i$, $\int \mathrm{d}\eta_i f(\eta_i) = \partial_{\eta_i} f(\eta_i)$ und $\{\partial_{\eta_i}, \eta_j\} \overset{i\neq j}{=} 0$

(b) Konstruieren Sie fermionische kohärente Zustände und zeigen Sie: $\hat{c}_i^\dagger\,|\eta\rangle = -\partial_{\eta_i}\,|\eta\rangle$.

(c) Vergewissern Sie sich von: $\prod_i \int \mathrm{d}\eta_i^*\mathrm{d}\eta_i e^{-\vec{\eta}^\dagger A\vec{\eta}+\vec{\nu}^\dagger\vec{\eta}+\vec{\eta}^\dagger\vec{\nu}} = \mathrm{Det}A\, e^{\vec{\nu}^\dagger A^{-1}\vec{\nu}}$
Hinweis: Verschiebungen der η^*, η (auch ϕ^*, ϕ bosonisch) sind unabhängig.

Unser Ziel ist es, die Zustandssumme $Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$ in feldintegrale Form zu schreiben. Verwenden Sie: $\prod_i \int \mathrm{d}\psi^*\mathrm{d}\psi e^{-\vec{\psi}^*\vec{\psi}}\,|\psi\rangle\,\langle\psi| = \mathbb{1}$ für die fermionischen Felder.

(d) Gehen Sie analog zu Aufgabe 3 von Blatt 5 vor und zeigen Sie:

$$Z = \int \mathcal{D}(\psi^*,\psi) e^{-S[\psi^*,\psi]}, \quad S[\psi^*,\psi] = \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \left[\int \mathrm{d}^3 r \psi^*\partial_\tau\psi + \mathcal{H}(\psi^*,\psi) - \mu\mathcal{N}(\psi^*,\psi)\right] \tag{7}$$

(e) Überlegen Sie sich durch Vergleich mit Gl. (2) von Blatt 5, was sich an Gl. (7) ändert, wenn die Zustandssumme für bosonische Zustände konstruiert werden soll.

In der Vorlesung wurde die Periodizität der Greenschen Funktion diskutiert, die sich auch auf die Felder $\psi(\tau,\vec{r})$ überträgt. Es ergeben sich folgende Transformationsregeln:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_n \psi_n\, e^{-i\omega_n\tau}, \quad \psi_n = \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \psi(\tau)\, e^{i\omega_n\tau} \quad \text{mit } \omega_n = \begin{cases} 2n\pi\beta^{-1} & \text{bosonisch} \\ (2n+1)\pi\beta^{-1} & \text{fermionisch} \end{cases} \tag{8}$$

Das im Weiteren betrachtete System sei durch folgende Operatoren beschrieben.

$$\hat{H}_{\mathrm{el}} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\epsilon(\vec{p})c_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{p}}, \qquad \hat{N} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} c_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{p}}, \qquad \hat{H}_{\mathrm{ph}} = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\omega(\vec{q}) a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}}, \tag{9}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = g' \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} c_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{p}+\vec{q}}\, i\sqrt{\omega_q}(a_{\vec{q}} - a_{-\vec{q}}^\dagger) \tag{10}$$

(f) Finden Sie ein passendes erzeugendes Funktional, um fermionische Korrelatoren für das durch die Gleichungen (9) und (10) definierte System ($\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{el}} + \hat{H}_{\mathrm{ph}} + \hat{H}_{\mathrm{int}}$) zu erhalten. Vergewissern Sie sich außerdem davon, dass Gl. (10) aus Gl. (1) auf Blatt 7 und Gl. (2) auf Blatt 3 folgt ($\omega = c_s|\vec{q}|$).

(g) Berechnen Sie die freien fermionischen und bosonischen Greensche Funktionen in Impulsdarstellung und vergleichen Sie diese mit den in der Vorlesung eingeführten.

(h) Integrieren Sie über die bosonischen Feldkonfigurationen und erklären Sie die physikalische Bedeutung der dabei entstehenden effektiven Wirkung.
Hinweis: Verwenden Sie hierzu Aufgabe 3d) von Blatt 5