KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE
DER KONDENSIERTEN MATERIE

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2011/2012

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. B. Narozhny

Blatt 1
Besprechung 28.10.2011

---

1. Ideales Fermi-Gas in niedrigen Dimensionen:

Wir betrachten ein ideales Gas freier fermionischer Punktteilchen der Masse m in niedrigen Dimensionen $d = 1, 2$.

Bestimmen Sie bei $T = 0$ die Beziehungen zwischen der Gesamtteilchenzahl N und

(a) dem Grenzimpuls p_F; (1 Punkt)

(b) der Grenzenergie E_F; (1 Punkt)

(c) der Gesamtenergie des Gases $U(T = 0)$, (1 Punkt)

(d) Berechnen Sie die Zustandsdichte (2 Punkte)

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k})).$$

2. Ideales Fermi-Gas bei $T \neq 0$

Wir betrachten jetzt ein ideales Gas freier fermionischer Punktteilchen der Masse m, die auch einen Spin 1/2 besitzen. Diese befinden sich in einem Volumen $V = L^3$, mit periodischen Randbedingungen für die Wellenfunktionen. Gegeben sei das chemische Potential μ.

Wenn $T \neq 0$, dann kann man die thermodynamischen Größen durch Integrale über die Fermi-Funktion ausdrücken. Bestimmen Sie auf diesem Weg

(a) das großkanonische Potential Ω; (2 Punkte)

(b) die Entropie S; (1 Punkt)

(c) die innere Energie U; (1 Punkt)

(d) die Gesamtteilchenzahl N. (1 Punkt)

(e) Überprüfen Sie, dass gilt

$$\Omega = -\frac{2}{3}U.$$

3. Das relativistische entartete Fermi-Gas:

Wird das Gas komprimiert, so nimmt die mittlere Energie der Elektronen zu (E_F wächst); wird sie mit mc^2 vergleichbar, so werden relativistische Effekte wesentlich. Wir betrachten hier ausführlich das vollständig entartete ultrarelativistische Elektronengas, die Energie seiner Teilchen soll groß im Vergleich zu mc^2 sein. Bekanntlich hängt in diesem Fall die Energie eines Teilchens von seinem Impuls durch die Beziehung

$$\epsilon = ck$$

ab. Dieses Modell kann man auch verwenden, um die Elektronen in Graphen zu beschreiben.

(a) Berechnen Sie die Zustandsdichte in den Dimensionen $d = 1, 2, 3$. (2 Punkte)

Bestimmen Sie für $T = 0$ die Beziehungen zwischen der Gesamtteilchenzahl N und

(b) dem Grenzimpuls p_F; (1 Punkt)

(c) der Grenzenergie E_F; (1 Punkt)

(d) der Gesamtenergie des Gases $U(T = 0)$, (1 Punkt)

4. Die zweite Quantisierung. Fermi-Statistik.

In dieser Übung betrachten Sie ein System aus N nichtwechselwirkenden Fermionen im Grundzustand. Das System findet sich im Volumen V. In der Vorlesung haben Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren kennengelernt. Der Operator $\hat{a}_i^\dagger$ vergrößert die Zahl der Teilchen im i-ten Zustand um 1. Den Operator $\hat{a}_i$ vermindert die Zahl der Teilchen im i-ten Zustand um 1. Man kann auch die Feldoperatoren einführen:

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}; \quad \widehat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}.$$

Der Operator $\widehat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})$ erzeugt ein Teilchen im Punkte $\mathbf{r}$. Der Dichte-Operator kann man durch die Feldoperatoren ausdrücken:

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \widehat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r}),$$

Bestimmen Sie jetzt:

(a) den Mittelwert der Teilchenzahldichte $\bar{n}$, (1 Punkt)

(b) den Mittelwert der Teilchenzahl $\bar{N}'$ in einem Volumen $V' < V$, (1 Punkt)

Hinweis: Benutzen Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Raum der Besetzungszahlen. Drücken Sie die physikalische Größe durch die Operatoren $\hat{a}^{\dagger}$ und $\hat{a}$ aus und berechnen Sie die Mittelwerte im Grundzustand.

(c) Berechnen Sie die Korrelation der Teilchenzahldichte für Teilchen mit gegebenen Werten der z-Komponente des Spins

$$\overline{n(\mathbf{r}_1, s_{z1})n(\mathbf{r}_2, s_{z2})},$$

wobei $n(\mathbf{r}_j, s_{zj})$ die Dichte von Teilchen im Ort $\mathbf{r}_j$ mit z-Komponente des Spins s_{zj} ist. (3 Punkte)

* Berechnen Sie die Korrelationsfunktion

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\bar{n}} \left(\overline{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)} - \bar{n}^2 \right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

wobei $n(\mathbf{r}_j)$ die Teilchendichte im Ort $\mathbf{r}_j$ und $\bar{n}$ der Mittelwert der Teilchendichte ist.