

## Theorie der Kondensierten Materie I WS 2011/2012

Prof. Dr. J. Schmalian  
Dr. B. NarozhnyBlatt 11  
Besprechung 27.01.2012**1. Effective Elektron-Elektron Wechselwirkung - kanonische Transformation**  
(20 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die, durch Elektron-Phonon Wechselwirkung hervorgerufene, effektive Elektron-Elektron Wechselwirkung mit Hilfe einer kanonischen Transformation hergeleitet werden. Die Form der Wechselwirkung sollte aus der Vorlesung bekannt sein, wo sie mit anderen Mitteln hergeleitet wurde.

- (a) Eine kanonische Transformation eines Operators
- $H$
- ist definiert durch

$$\tilde{H} = e^{-S} H e^S \quad (1)$$

Zeigen sie, dass die obige Form äquivalent ist zu

$$\tilde{H} = H + [H, S] + \frac{1}{2} [[H, S], S] + \dots \quad (2)$$

- (b) Wir betrachten nun einen Hamiltonoperator
- $H_0$
- mit einer kleinen Störung
- $V$

$$H = H_0 + V \quad (3)$$

Die Idee der kanonischen Transformation ist nun, den Operator  $S$  so zu wählen, dass der transformierte Hamiltonoperator  $\tilde{H}$  keine Terme mehr enthält, die linear in der Störung  $V$  sind.

Zeigen sie, dass diese Bedingung der Forderung

$$V + [H_0, S] = 0 \quad (4)$$

entspricht.

- (c) Benutzen sie die Eigenzustände des ungestörten Hamiltonoperators
- $\langle n|$
- und zeigen sie, dass
- $S$
- geschrieben werden kann als

$$\langle n|S|m\rangle = \frac{\langle n|V|m\rangle}{E_m - E_n} \quad (5)$$

Zeigen sie schliesslich, dass für den transformierten Hamiltonoperator nun gilt

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2} [V, S] + O(V^3) \quad (6)$$

- (d) Betrachten wir jetzt den Frölich Hamiltonoperator, der die Elektron-Phonon-WW beschreibt, als Störung

$$H_{e-ph} = \sum_{p,q,\sigma} V(q) c_{p+q,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma} (a_q + a_{-q}^\dagger). \quad (7)$$

mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Elektronen  $c, c^\dagger$  und Phononen  $a, a^\dagger$  ( $a_q + a_{-q}^\dagger \propto u(q)$ , wobei  $u$  die Verschiebung der Ionen ist).

Berechnen sie mit Hilfe einer kanonischen Transformation den effektiven Hamiltonoperator.

Werten sie dazu die die Matrixelemente von  $S$  bezüglich der Phononzustände aus. Da wir am Tieftemperaturverhalten interessiert sind, sind nur die Matrixelemente mit dem  $T = 0$  Grundzustand  $|0\rangle$  wichtig. Die Korrektur zum ungestörten Hamiltonoperator kann dann als effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung geschrieben werden.