Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

Prof. A. Mirlin

Dr. I.V.Protopopov, U. Briskot, E. König

Blatt 1

Besprechung 19.4.2013

---

1. Greensche Funktion - 1-dim. Wärmeleitungsgleichung (5 Punkte)

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung lautet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T(t,x) = 0.$$

Hierbei ist $T(t,x)$ die Temperatur zur Zeit t am Ort x und λ die Temperaturleitfähigkeit. Eine zugehörige Greensche Funktion muss die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(t-t', x-x') = \delta(t-t')\delta(x-x') \tag{1}$$

erfüllen. Lösen sie diese Gleichung im Energie-Impulsraum und zeigen Sie explizit mit Hilfe einer Fouriertransformation und des Residuensatzes, dass

$$G(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda t}}\theta(t)\exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right)$$

gilt. Erläutern Sie, wie sich damit die Temperatur $T(t,x)$ für $t > 0$ berechnen lässt, wenn $T(0,x) = T_0(x)$ gegeben ist.

2. Greensche Funktion - Diffusion in d-dim. Gitter (10 Punkte)

Wir betrachten die Zufallsbewegung (Brownsche Bewegung) eines klassischen Teilchens auf einem d-dimensionalen, unendlich ausgedehnten, kubischen Gitter mit Gitterkonstante $a = 1$. Das Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Gitterpunkt $\boldsymbol{x} = (0, \ldots, 0)$ und bewegt sich mit Ablauf eines jeden diskreten Zeitintervalls $t \to t+1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu einem der $2d$ benachbarten Gitterplätze.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Wahrscheinlichkeit P_0 zu berechnen, dass das Teilchen in der Zeitspanne von $t = 1$ bis $t = \infty$ niemals zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

(a) Es sei $p(t,\boldsymbol{x})$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen zum diskreten Zeitpunkt t am diskreten Ort $\boldsymbol{x}$ befindet. Desweiteren definieren wir die Fouriertransformierte

$$p(t,\boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{x}} e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} p(t,\boldsymbol{x})$$

sowie die generierende (oder Greensche) Funktion

$$G(\omega,\boldsymbol{q}) = \sum_{t\geq 0} e^{i\omega t} p(t,\boldsymbol{q}).$$

Zeigen Sie, dass für $|W(\boldsymbol{q})| < 1$ gilt:

$$G(\omega, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{1 - e^{i\omega} W(\boldsymbol{q})}, \quad \text{wobei } W(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{d}(\cos q_1 + \ldots \cos q_d).$$

Welche analytischen Eigenschaften hat $G(\omega, \boldsymbol{q})$ in diesem Fall als Funktion der komplexen Variablen ω? *(2 Punkte)*
Hinweis: Betrachten Sie die Änderung von $p(t, \boldsymbol{x})$ bei einem Zeitschritt.

(b) Geben Sie $G(\omega, \boldsymbol{q})$ im Grenzfall $\omega, |\boldsymbol{q}| \ll 1$ an und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Greenschen Funktion aus Aufgabe 1. Überlegen Sie sich, welche Gleichung für die Form der Greenschen Funktion verantwortlich ist und welchen Anfangsbedingungen diese genügt. *(1 Punkt)*

(c) Zeigen Sie, dass das Teilchen in der Zeitspanne $t = 1$ bis $t = \infty$ im Mittel $\langle N \rangle$-mal zum Ausgangspunkt zurückkehrt mit

$$\langle N \rangle = \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{W(\boldsymbol{q})^2}{1 - W(\boldsymbol{q})}.$$

Untersuchen Sie das Verhalten von $\langle N \rangle$ für $d \leq 2$, $d > 2$ und $d \to \infty$. (Für den letzten Fall kann es hilfreich sein, sich z.B. an den zentralen Grenzwertsatz für Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erinnern.) *(3 Punkte)*

Wir zeigen nun, dass

$$P_0 = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} \tag{2}$$

gilt, und bezeichnen dazu mit p_τ die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zum Zeitpunkt τ das erste Mal zurückkehrt.

(d) Drücken Sie in Abhängigkeit von p_τ die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass das Teilchen

(i) zur Zeit $\tau_1 + \tau_2$ das zweite (nicht notwendigerweise letzte) Mal zurückkehrt, unter der Bedingung, dass es zur Zeit τ_1 das erste Mal zurückgekehrt ist;

(ii) bis einschließlich zum Zeitpunkt t mindestens n-mal zurückgekehrt ist;

(iii) insgesamt, d. h. zur Zeit $t \to \infty$, mindestens n-mal zurückgekehrt ist. Im weiteren bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit $P_{\geq n}$.
(Überlegen Sie sich, warum diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $P_{\geq 1}$ dargestelt werden kann.)

(2 Punkte)

(e) Drücken Sie P_0 und $\langle N \rangle$ in Abhängigkeit von $P_{\geq 1}$ aus und beweisen Sie damit Gleichung (2)!
(2 Punkte)
Hinweis: Es ist vielleicht hilfreich die Wahrscheinlichkeit P_n zu bestimmen, dass das Teilchen insgesamt genau n-mal zurückkehrt.

3. Wiederholung: Konturintegration (Bonus)

Hinweis: Die hier angegebenen Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen. Sie dienen der selbstständigen Wiederholung bekannter Techniken aus der komplexen Analysis.

(a) Bestimmen Sie jeweils Lage und Art sämtlicher Singularitäten (bei Polen gebe man die Ordnung an) sowie die Residuen in diesen Punkten.

$$i)\ f(z) = \sin\frac{1}{1-z} \qquad\qquad ii)\ f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

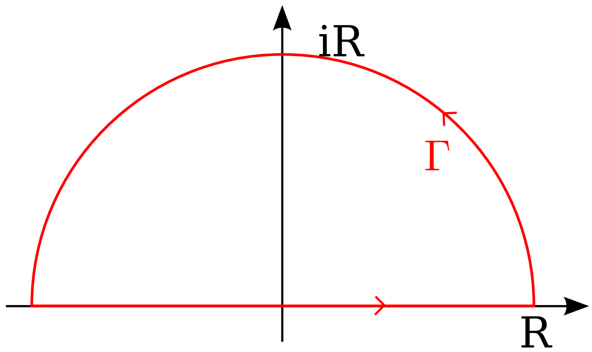
(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$i)\ \oint_{|z|=2} \frac{z}{e^{iz}-1}dz \qquad\qquad ii)\ \oint_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz$$

(c) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{ze^{i\alpha z}}{z^2+\beta^2}\ (\alpha,\beta > 0)$$

und der nebenan abgebildet Integrationsweg Γ



i) Berechnen Sie $\oint_\Gamma f(z)\, dz$.

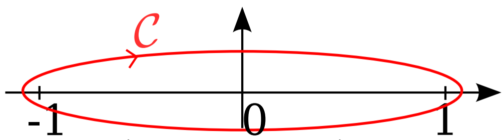
ii) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\alpha x}{x^2+\beta^2}dx$.

(d) Integration mit Hilfe eines Verzweigungsschnittes. Gegeben sei:

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x(1+x)^\alpha(1-x)^{1-\alpha} \qquad\qquad (\alpha \in (0,1))$$

- Stellen Sie die analytische Struktur des Integranden von I in der komplexen Ebene dar.
- Betrachten Sie nun das folgende Konturintegral:

$$I' = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}x(1+x)^\alpha(x-1)^{1-\alpha}$$



Was ist die analytische Struktur des Integranden in I'? Führen Sie I' auf das Integral I zurück. *Lösung:* $I' = 2i\sin(\alpha\pi)I$.

- Verwenden Sie nun den Residuensatz um I' zu berechnen. *Hinweis: Eine hilfreiche Substitution ist* $x \to 1/z$.
- Entspricht Ihr Endergebnis für I in den Sonderfällen $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 1$ Ihrer Erwartungshaltung?

Literatur

Klassische Lehrbücher:

- Abrikosov, Aleksej A., Gorkov, Lev P. and Dzyalozhinskij, I. E., *Methods of quantum field theory in statistical physics*, New York, Dover Publ., (1975).
- Lifshits, Evgenij M. and Pitaevskij, Lev P. and Sykes, John B. [Uebers], *Course of theoretical physics, Vol. 9: Statistical physics, Pt. 2 : theory of condensed state*,(2002).
- Mahan, Gerald D., *Many-particle physics*, New York [u.a.], Kluwer Academic, Plenum Publ.,(2000).
- Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk, *Quantum theory of many-particle systems*, Mineola, N.Y., Dover Publ.,(2003).
- Schrieffer, John R., *Theory of superconductivity*, [Reading, Mass.], Westview, Perseus Books, (1999).
- Negele, John W. and Orland, Henri, *Quantum many-particle systems*, Reading, MA, Westview Press, a member of the Perseus Books Group, (1998).

Neuere Lehrbücher:

- Bruus, Henrik and Flensberg, Karsten, *Many-body quantum theory in condensed matter physics : an introduction*, Oxford, Oxford Univ. Press,(2010).
- Altland, Alexander and Simons, Ben D., *Condensed matter field theory*, Cambridge [u.a.], Cambridge Univ. Press, (2012).

Online-Skripte:

- Coleman, Piers, *Introduction to Many Body Physics*, (2013), url: `http://www.physics.rutgers.edu/~coleman/620/mbody/pdf/bkx.pdf`.
- Nayak, Chetan, *Quantum Condensed Matter Physics - Lecture Notes*, (2004), url: `www.physics.ucla.edu/~nayak/many_body.pdf` .

Spezialthemen:

- Giamarchi, Thierry, *Quantum physics in one dimension*, Oxford, Clarendon Press,(2006).
- Kamenev, Alex, *Field theory of non-equilibrium systems*, Cambridge [u.a.], Cambridge Univ. Press,(2011).