Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

Prof. A. Mirlin

Dr. I.V.Protopopov, U. Briskot, E. König

Blatt 2

Besprechung 26.4.2013

1. Gebundene Zustände im flachen Potentialtopf (12 Punkte)

Ein Potentialtopf mit linearer Dimension (Durchmesser) a gilt als "flach", wenn die Tiefe U_0 wesentlich kleiner ist als die kinetische Energie eines im Topf lokalisierten Elektrons:

$$U_0 \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2}. \tag{1}$$

Gebundene Zustände sind deshalb räumlich wesentlich weiter ausgedehnt als der Topf, während die Bindungsenergie wesentlich geringer ist als U_0. Es gilt, die Existenz gebundener Zustände in $d = 1, 2, 3$ mit Hilfe der Streuamplitude zu untersuchen.

Die Green'sche Funktion eines Elektrons in einem äußeren Potential $V(\boldsymbol{r})$ genügt der Dyson Gleichung

$$G(\epsilon, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'}) = G_0(\epsilon, \boldsymbol{p})(2\pi)^d \delta^d(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') + \int \frac{d^d p''}{(2\pi)^d} G_0(\epsilon, \boldsymbol{p}) V(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'') G(\epsilon, \boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}'), \tag{2}$$

wobei

$$G_0(\epsilon, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{\epsilon - \frac{p^2}{2m} + i0} \tag{3}$$

die (retardierte) Green'sche Funktion des freien Elektrons und

$$V(\boldsymbol{p}) = \int d^d r e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} V(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

die Fouriertransformierte des Potentials ist. Die Green'sche Funktion lässt sich auch mit Hilfe der Streuamplitude (oder auch "amputierte Green'sche Funktion") $F(\epsilon, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'})$ darstellen:

$$G(\epsilon, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'}) = G_0(\epsilon, \boldsymbol{p})(2\pi)^d \delta^d(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') + G_0(\epsilon, \boldsymbol{p}) F(\epsilon, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'}) G_0(\epsilon, \boldsymbol{p}'). \tag{5}$$

(a) Welcher Summe von Feynman Diagrammen entspricht F? Stellen Sie in Analogie zur Dyson Gleichung für G eine Integralgleichung für F auf, die außer F nur V und G_0 enthält.

(b) Begründen Sie, warum gebundenen Zustände des Potentialtopfes $V(\boldsymbol{r})$ Polen von $F(\epsilon, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'})$ bei negativen Energien ϵ entsprechen.

Es gilt nun, die gebundenen Zustände des flachen Potentialtopfes zu bestimmen. Nähern Sie hierzu den Potentialtopf durch eine δ-Distribution:

$$V(\boldsymbol{r}) = -U_0 a^d \delta^d(\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

(c) Ist diese Näherung nur für Töpfe mit kleinem Durchmesser a oder für flache Töpfe ganz allgemein sinnvoll?

(d) Berechnen Sie $V(\boldsymbol{p})$. Zeigen Sie anhand der Integralgleichung aus Teil a), dass F nun nur noch von ϵ abhängt.

(e) Berechnen Sie die ersten beiden Diagramme für F (aus Teilaufgabe a)) explizit. Verallgemeinern Sie Ihr Resultat und bestimmen Sie den Ausdruck für das n-te Diagramm (Ordnung V^n). Summieren Sie die Diagramme auf.

(f) Zeigen Sie, dass in $d = 1$ ein gebundener Zustand existiert und berechnen Sie die Energie. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit *Landau und Lifshitz, Bd. III, Quantenmechanik*, §45, Aufgabe 1.

(g) Untersuchen Sie, ob auch in $d = 2$ ein gebundener Zustand existiert und vergleichen Sie das Ergebnis mit *Landau und Lifshitz, Bd. III, Quantenmechanik*, §45, Aufgabe 2.

Hinweis: Überlegen Sie sich, ob es physikalisch sinnvoll ist, die Impulsintegration von $|\boldsymbol{p}| = p = 0$ bis $p = \infty$ auszuführen? Warum ist es notwendig, einen so genannten *cutoff* einzuführen und durch welche Größe wird er bestimmt? Es ist hierbei vielleicht hilfreich, wenn Sie sich überlegen, welche Näherungen in der bisherigen Rechnung gemacht wurden.

(h) Zeigen Sie schließlich, dass in $d \geq 3$ keine gebundenen Zustände existieren.

2. Kitaev-Kette und Majorana Fermionen (8 Punkte)

Die Kitaev-Kette ist durch folgenden eindimensionalen Hamiltonoperator definiert:

$$H = \sum_i \left[\left(-t c_i^\dagger c_{i+1} + \Delta c_i c_{i+1} \right) + h.c. \right] - \sum_i \mu c_i^\dagger c_i. \tag{7}$$

Es handelt sich also um ein tight-binding-model spinloser Fermionen, die durch den Operator $c_i^\dagger$ (c_i) am Ort i erzeugt (vernichtet) werden. Zwischen den Gitterplätzen hüpfen sie mit Übergangsmatrixelement $t > 0$, und unterliegen weiter einem chemischen Potential $\mu < 0$ und einer supraleitenden Paarungsamplitude Δ (der Einfachkeit halber sei $\Delta \in \mathbb{R}$).

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Hamiltonoperators (7) für ein unendlich ausgedehntes System. Führen Sie dazu eine Fouriertransformation durch und bringen Sie das Modell auf die Form

$$H = \sum_k \left(c_k^\dagger, c_{-k} \right) \begin{pmatrix} -\tilde{\epsilon}(k) & -i\tilde{\Delta}(k) \\ i\tilde{\Delta}(k) & \tilde{\epsilon}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(b) Mit Hilfe der unitären *Bogoliubov-Transformation* gelangen wir in die Diagonalbasis des Hamiltonoperators

$$\begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{9}$$

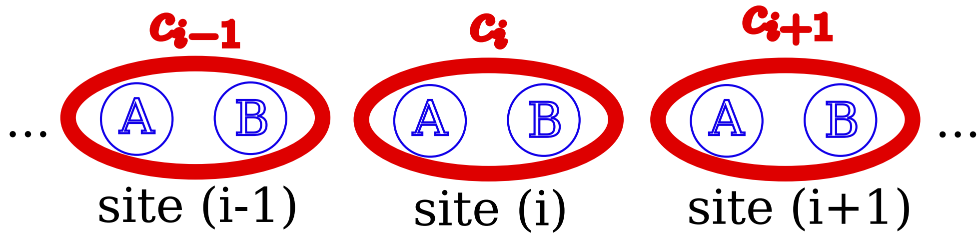

Abbildung 1: An jedem Gitterplatz lassen sich die Fermionen mit Hilfe der Linearkombination zweier Majoranas darstellen.

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix U und überprüfen Sie, dass b_k und $b_k^\dagger$ den fermionischen Vertauschungsrelationen genügen. *Hinweis:* $U = e^{i\phi\tau_x}$. *Dabei ist* τ_x *die erste Paulimatrix im Nambu-Raum. Bestimmen Sie die Phase* ϕ.

(c) Die Fermionen lassen sich an jedem Gitterplatz i mit Hilfe zweier *Majorana*-Fermionen ausdrücken (die wir mit dem Label A bzw. B unterscheiden), siehe auch Abb. 1. Majorana Fermionen haben die Besonderheit ihre eigenen Antiteilchen zu sein, d.h. ihr Erzeuger gleicht dem Vernichter $\gamma_{i,A} = \gamma_{i,A}^\dagger$ und $\gamma_{i,B} = \gamma_{i,B}^\dagger$.

$$c_i = \frac{1}{2}\left(\gamma_{i,A} - i\gamma_{i,B}\right) \text{ und } c_i^\dagger = \frac{1}{2}\left(\gamma_{i,A} + i\gamma_{i,B}\right) \tag{10}$$

Bestimmen Sie die Vertauschungsrelationen der Majoranas unter Zuhilfenahme der fermionischen Vertauschungsrelationen.

(d) Wir wollen nun Randeffekte betrachten und somit eine endliche Kette mit N Gitterplätzen:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(-tc_i^\dagger c_{i+1} + \Delta c_i c_{i+1}\right) + h.c.\right] - \sum_{i=1}^{N}\mu c_i^\dagger c_i. \tag{11}$$

Drücken Sie den Hamiltonoperator (11) durch Majorana Fermionen aus.

(e) Im Sonderfall $t = \Delta$ und $\mu = 0$ ist der Hamiltonoperator besonders einfach durch die fermionischen Operatoren

$$d_i = \frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,A} + i\gamma_{i,B}\right) \text{ und } d_i^\dagger = \frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,A} - i\gamma_{i,B}\right) \; (i = 1, ..., N-1) \tag{12}$$

auszudrücken. Zeigen Sie, dass d_i und $d_i^\dagger$ den fermionischen Vertauschungsrelationen genügen und stellen Sie im gegebenen Sonderfall den Hamiltonian durch diese dar. Ist das System in der Phase eines (Band-)Isolators? Haben alle Anregungen eine Energielücke zu überwinden? *Hinweis: Zeichnen Sie für die Operatoren* $\gamma_{i,A}$,$\gamma_{i,B}$ *und* d_i *eine Skizze analog zu Abb. 1. Beachten Sie auch den Rand.*