Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13**

Prof. A. Mirlin
Dr. I. V. Protopopov, U. Briskot, E. König

**Blatt 4**
**Besprechung 10.05.13**

---

**1. Longitudinale Phononen und der Phonon-Propagator** (20 Punkte)

Als einfachstes Modell für Phononen (Gitterschwingungen) im Kristallgitter betrachten wir longitudinale Schallwellen in einem isotropen, homogenen Medium. Die klassische Lagrange-Funktion der Phononen ist gegeben durch

$$L_0 = \int d^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{L}_0(\boldsymbol{r}), \quad \mathcal{L}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{2}\Big[(\partial_t\vec{q})^2 - c^2(\nabla\cdot\vec{q})^2\Big], \tag{1}$$

wobei $\vec{q}(\boldsymbol{r},t)$ die Auslenkung des Mediums von der Ruhelage am Punkt $\boldsymbol{r}$ beschreibt. Die Konstanten $\rho_0$ und $c$ bezeichnen die mittlere Dichte des Mediums und die Schallgeschwindigkeit.

(a) Motivieren Sie die Form der Lagrangedichte (1), insbesondere des Terms proportional zu $(\nabla\vec{q})^2$ für ein einfaches Modell gekoppelter harmonischer Oszillatoren in 1D.

Schreiben Sie die Lagrangedichte (1) im Impulsraum für die Fouriertransformierte $\vec{q}(\boldsymbol{k},t)$. Zerlegen Sie das Feld $\vec{q}(\boldsymbol{k},t)$ in einen Anteil parallel, im Folgenden als $q(\boldsymbol{k},t)$ bezeichnet, und senkrecht zu $\vec{k}$. Zeigen Sie, dass die beiden Komponenten entkoppeln. Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L}[q(\boldsymbol{r},t)]$ für das Feld $q(\boldsymbol{r},t)$, welches die longitudinalen Phonon-Moden beschreibt, folgende Form hat:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{2}\Big[(\partial_t q)^2 - c^2(\nabla q)^2\Big]. \tag{2}$$

(b) Stellen Sie die klassische Bewegungsgleichung für das Feld $q(\boldsymbol{r},t)$ auf.

*Hinweis: Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung einer klassischen Feldtheorie folgende Form hat:*

$$\partial_t \frac{\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{r},t)}{\delta(\partial_t q(\boldsymbol{r},t))} + \nabla\frac{\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{r},t)}{\delta(\nabla q(\boldsymbol{r},t))} - \frac{\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{r},t)}{\delta q(\boldsymbol{r},t)} = 0.$$

(c) Lösen Sie die klassische Bewegungsgeichung durch Fouriertransformationen im Raum und in der Zeit. Zeigen Sie, dass die Schallwellen der linearen Dispersion $\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$ genügen.

(d) Berechnen Sie das zum Feld $q(\boldsymbol{r},t)$ kanonisch konjugierte "Impulsfeld"

$$p(\boldsymbol{r},t) \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_t q(\boldsymbol{r},t))}.$$

Welcher physikalischen Größe entspricht dieses Feld?

(e) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion des klassischen Systems. Zeigen Sie, dass sich diese als eine Summe über Moden $\boldsymbol{k}$ darstellen lässt, welche jeweils einem harmonischen Oszillator mit Frequenz $\omega_{\boldsymbol{k}}$ entsprechen.

Es gilt nun, diese Schallwellen zu quantisieren. Die klassischen Felder $q(\boldsymbol{r},t)$ und $p(\boldsymbol{r},t)$ werden hierbei durch Operatoren ersetzt, die der kanonischen Vertauschungsregel

$$[\hat{q}(\boldsymbol{r},t), \hat{p}(\boldsymbol{r}',t)] = i\hbar\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

genügen. Im Folgenden sei $\hbar = 1$. Die Quantisierung lässt sich technisch bewerkstelligen, indem die Quantenfelder $\hat{q}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{p}(\boldsymbol{r},t)$ durch geeignete Kombinationen von bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dargestellt werden.

(f) Begründen Sie: Müssen die Operatoren $\hat{q}$ und $\hat{p}$ hermite'sch sein?

(g) In Analogie an die Quantisierung des linearen harmonischen Oszillators wählt man den folgenden Ansatz für $\hat{q}(\boldsymbol{r},t)$ in Heisenberg-Darstellung:

$$\hat{q}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{k}} \Big[ b_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kr}-i\omega_{\boldsymbol{k}}t} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{kr}+i\omega_{\boldsymbol{k}}t} \Big].$$

Inwiefern besteht eine Analogie zum harmonischen Oszillator? Wodurch ist diese Analogie gerechtfertigt? Bestimmen Sie die Koeffizienten $A_{\boldsymbol{k}}$.

*Hinweis: Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil (1d) sowie den Kommutator (3).*

(h) Drücken Sie den Hamilton-Operator des quantisierten Systems durch $b_{\boldsymbol{k}}$ und $b_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ aus.

(i) Überzeugen Sie sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho(\boldsymbol{r},t) + \rho_0\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = 0$, dass das Phononfeld, üblicherweise durch

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t) \equiv \sum_{\boldsymbol{k}} i\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2V}} \Big[ b_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kr}-i\omega_{\boldsymbol{k}}t} - b_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{kr}+i\omega_{\boldsymbol{k}}t} \Big] \tag{4}$$

dargestellt, proportional zur Abweichung der Dichte $\rho(\boldsymbol{r},t)$ von der mittleren Dichte $\rho_0$ des Mediums ist und geben Sie die Proportionalitätskonstante an.

(j) Überlegen Sie sich, welche Form die Lagrangedichte der Wechselwirkung des Phononfeldes $\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t)$ mit dem Feld der Elektronen $\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)$ in einem Metall hat.

Die Greensche Funktion eines unter Raum- und Zeittranslationen invarianten Systems nicht wechselwirkender Phononen ist definiert durch

$$D(\boldsymbol{r},t) = -i \langle\Phi_0|\, \mathrm{T}\, \hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t)\, \hat{\varphi}(\boldsymbol{0},0)\, |\Phi_0\rangle\,, \tag{5}$$

wobei T das chronologische Produkt ("latest to the left") und $\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t)$ das in (4) definierte Phononfeld bezeichnet.

(k) Welche der bosonischen Phononenzustände sind im Grundzustand $|\Phi_0\rangle$ bei Temperatur $T{=}0$ besetzt?

(l) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $D(\boldsymbol{k},\omega)$ durch explizites Einsetzen der Phononenfelder.

**2. Der Heisenberg-Magnet und Jordan-Wigner-Transformation** (12 Punkte)

Der eindimensionale Heisenberg-Magnet mit nächster-Nachbar-Kopplung wird durch den Hamilton-Operator

$$H = -\sum_{j=1}^{N} \big( J_x S_j^x S_{j+1}^x + J_y S_j^y S_{j+1}^y + J_z S_j^z S_{j+1}^z \big) \tag{6}$$

beschrieben. Wir berechnen das Anregungsspektrum, indem wir die Spinoperatoren durch fermionische Operatoren ausdrücken.

Ein lokalisierter Elektronspin lässt sich durch einen unbesetzten oder einfach besetzten Fermionenzustand darstellen:

$$|\uparrow\rangle \equiv c^\dagger |0\rangle\,, \quad |\downarrow\rangle \equiv |0\rangle\,.$$

Für die Spinoperatoren ergibt sich

$$S^+ = S^x + iS^y = c^\dagger, \quad S^- = S^x - iS^y = c, \quad S^z = c^\dagger c - \frac{1}{2}. \tag{7}$$

a) Überzeugen Sie sich, dass die in (7) definierten Spinoperatoren der SU(2)-Spinalgebra $\left[S^a, S^b\right] = i\epsilon^{abc}S^c$ genügen.

Das Problem mit dieser Darstellung ist, dass die Fermion-Operatoren auf verschiedenen Gitterplätzen $j$ Antikommutationsregeln genügen, die Spinoperatoren jedoch kommutieren müssten. Um dieses Problem zu umgehen, führten Jordan und Wigner sogenannte *String*-Operatoren ein ($n_i = c_i^\dagger c_i$):

$$S_j^+ = c_j^\dagger \exp\left(-i\pi \sum_{i<j} n_i\right), \quad S_j^- = c_j \exp\left(i\pi \sum_{i<j} n_i\right), \quad S_j^z = c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Spinoperatoren auf verschiedenen Gitterplätzen $j$ und $k$ nun vertauschen, d.h. $\left[S_j^\pm, S_k^\pm\right] = 0$. Überlegen Sie sich außerdem wie dieser String-Operator funktioniert und wann eine solche Konstruktion möglich ist.*Hinweis: Berechnen Sie zunächst* $\{e^{i\pi n_j}, c_j^\dagger\}$

c) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator (6) mit Hilfe einer Jordan-Wigner-Transformation in der Form

$$H = -\sum_{j=1}^{N}\Big\{t\big(c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.\big) - \Delta\big(c_j c_{j+1} + h.c.\big) + J_z\big(n_j - \tfrac{1}{2}\big)\big(n_{j+1} - \tfrac{1}{2}\big)\Big\}$$

geschrieben werden kann, wobei "*h.c.*" das hermite'sch Konjugierte des vorhergehenden Terms bedeutet und geben Sie $t$ und $\Delta$ an.

d) Betrachten Sie im Folgenden den Spezialfall $J_z = 0$ des magnetischen Modells (auch XY-Modell genannt).

In fermionischer Formulierung entspricht dieses Modell der Kitaev Kette (Übungsblatt 2 Aufgabe 2). Sie kennen also schon die Lösung des Problems.

- Welche Bedeutung kommt den Anregungsenergien im magnetischen Problem zu? Gehen Sie insbesondere auf die Spezialfälle $J_x = J_y$ und $J_y = 0$ ein.
- Welche topologischen Phasen des Kitaev Modells lassen sich im XY-Modell realisieren?
- Die topologisch nichttriviale Phase des Kitaev Modells ist gekennzeichnet durch am Rand lokalisierte Majoranaanregungen. Auf Grund der erhaltenen Fermionparität gibt es einen zweifach (nahezu) entarteten Grundzustand: Entweder beide Majoranazustände sind besetzt oder beide sind leer. Was ist die physikalische Bedeutung im magnetischen Problem?