

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

PROF. A. MIRLIN

Blatt 5

DR. I. V. PROTOPOV, U. BRISKOT, E. KÖNIG

Besprechung 17.05.13**1. Hartree–Fock-Näherung**

(8 Punkte)

Gegeben sei ein ideales Fermi-Gas bei Temperatur $T = 0$. Es soll nun die Wechselwirkung

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}\sigma\sigma'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\sigma'}^\dagger V_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'\sigma'} c_{\mathbf{k}\sigma}$$

eingeschaltet und als kleine Störung betrachtet werden.

- Verwenden Sie das Wick'sche Theorem, um einen Ausdruck für den Erwartungswert von $\hat{V}$ im nichtwechselwirkenden Grundzustand herzuleiten.
- Zeichnen Sie die den beiden Termen aus Teil (a) entsprechenden Diagramme und erläutern Sie deren physikalische Bedeutung.
- Erklären Sie den Zusammenhang des in Teilaufgabe a) berechneten Erwartungswerts und der Änderung der Grundzustandsenergie.

2. Kohärente Zustände

(10 Punkte)

Wir betrachten den harmonischen Oszillator $\hat{H} = \omega(\hat{n} + 1/2)$, wobei $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Zu bestimmen sind die Eigenzustände des Operators $\hat{a}$,

$$\hat{a}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle \quad (\text{mit } \phi \in \mathbb{C}), \quad |\phi\rangle = \sum_n \alpha_n |n\rangle.$$

- Bestimmen Sie die Koeffizienten α_n (es sei $\alpha_0 = 1$). Bestimmen Sie weiter den Operator $\hat{O}$, für den gilt $|\phi\rangle = \hat{O}|0\rangle$. Besitzt auch $\hat{a}^\dagger$ analoge Eigenzustände?
- Zeigen Sie,

$$\hat{a}^\dagger |\phi\rangle = \partial_\phi |\phi\rangle, \quad \langle \theta | \phi \rangle = e^{\theta^* \phi}.$$

- Die kohärenten Zustände bilden eine übervollständige Basis. Zeigen Sie, dass sie folgende Relation erfüllen:

$$\mathbb{1} = \int \frac{d\text{Re}\phi d\text{Im}\phi}{\pi} e^{-\phi^* \phi} |\phi\rangle \langle \phi|. \quad (1)$$

- Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände minimale Unschärfe aufweisen. Erinnern Sie sich dafür, wie Sie $\hat{a}$ ($\hat{a}^\dagger$) durch $\hat{p}$ und $\hat{x}$ ausdrücken.
- Gehen Sie davon aus, dass $\hat{a}^\dagger$ ein Photon erzeugt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(N)$ genau N Photonen in einem System zu finden, das in dem kohärenten Zustand $|\phi\rangle$ präpariert wurde. Interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Korrelation der einzelnen Photonen.

Wir führen nun kohärente bosonische Vielteilchen-Zustände ein. Betrachten Sie dazu ein System aus M harmonischen Oszillatoren, beschrieben durch die Operatoren $\{\hat{a}_i\}, \{\hat{a}_i^\dagger\}$, mit $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, M$). Die Vielteilchen-Zustände sind definiert als,

$$|\phi\rangle = e^{\sum_i \phi_i \hat{a}_i^\dagger} |0\rangle.$$

- (f) Bestimmen Sie die Verallgemeinerung der Relationen aus Aufgabenteilen a)-c) für die Größen

$$a_i |\phi\rangle, \quad a_i^\dagger |\phi\rangle, \quad \langle \theta | \phi \rangle$$

und die Zerlegung der Eins.

- (g) Betrachten Sie abschließend einen fermionischen harmonischen Oszillator (fermionische Erzeuger- und Vernichteroperatoren). Kann man auch hier kohärente Zustände analog zum bosonischen Fall einführen? Begründen Sie.

3. Gauß'sche Integrale und Wick'sches Theorem

(4 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass $\int d^n x e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T M \vec{x} + \vec{J}^T \vec{x}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} e^{\frac{1}{2} \vec{J}^T A^{-1} \vec{J}}$ gilt.

(Sie können annehmen, dass die Matrix $A = \frac{M+M^T}{2}$ positiv definit ist. Wir verwenden im Weiteren $C = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}}$.)

- (b) Vergewissern Sie sich von $\int d^n x x_i x_j e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}} = C (A^{-1})_{i,j}$.

- (c) Zeigen Sie $\int d^n x x_1 \dots x_{2n} \frac{e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}}}{C} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in S_{2n}} (A^{-1})_{\pi(1), \pi(2)} \dots (A^{-1})_{\pi(2n-1), \pi(2n)}$.

- (d) Erklären Sie die Überschrift dieser Aufgabe.