Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

Prof. A. Mirlin

Dr. I. V. Protopopov, U. Briskot, E. König

Blatt 6

Besprechung 24.05.13

---

1. Grundzustandsenergie und Cluster-Expansion (10 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Vielteilchensystems sei gegeben durch

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H}_0 + \hat{V}(\lambda),$$

wobei der Parameter λ zum adiabatischen Einschalten der Wechselwirkung verwendet werden soll: $\hat{V}(\lambda) \equiv \lambda \hat{V}$. Es gilt, aus der Entwicklung der Wechselwirkungsenergie

$$\langle \phi(\lambda) | \, \hat{V}(\lambda) \, | \phi(\lambda) \rangle = \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \lambda^3 V_3 + \dots \tag{1}$$

nach Potenzen von λ, wobei $|\phi(\lambda)\rangle$ den exakten Grundzustand von $\hat{H}(\lambda)$ bezeichnet, eine Entwicklung für die durch die Wechselwirkung verursachte Änderung der Grundzustandsenergie ΔE zu bestimmen.

(a) Überlegen Sie sich zunächst, warum ΔE nicht einfach durch (1) gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie die Änderung ΔF der freien Energie

$$F(\lambda) = -T \ln Z, \quad \text{wobei} \quad Z = \mathrm{Tr}[e^{-\beta \hat{H}(\lambda)}], \ \beta = \frac{1}{T}$$

während des Einschaltvorganges ($\lambda : 0 \to 1$), indem Sie $F(\lambda)$ zunächst nach λ differenzieren, und dann integrieren.

(c) Bestimmen Sie schließlich ΔE aus ΔF und (1).

(d) Überlegen Sie sich, ob und, wenn ja, wie wir diese Entwicklung auch ohne den Umweg über endliche Temperaturen erhalten könnten.

2. Änderung der Grundzustandsenergie in 1. Ordnung (5 Punkte)

Auf Blatt 5 und in der Vorlesung wurde der Ausdruck

$$\frac{E - E_0}{V} = \frac{1}{2} \left\{ V_0 \left(\sum_\sigma \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} n_{\boldsymbol{k},\sigma} \right)^2 - \sum_\sigma \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3} V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'} n_{\boldsymbol{k},\sigma} n_{\boldsymbol{k}',\sigma} \right\},$$

für die Änderung der Grundzustandsenergie in Hartree-Fock-Näherung hergeleitet. Hierbei ist $n_{\boldsymbol{k},\sigma}$ die Besetzungszahl des Zustands $\boldsymbol{k}$ mit Spin $\sigma = \pm 1/2$. Berechnen Sie den Fock-Term für die Coulomb-Wechselwirkung

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}|} \quad \text{, bzw.} \quad V_{\boldsymbol{q}} = \frac{4\pi e^2}{\boldsymbol{q}^2} .$$

Drücken Sie das Ergebnis in Abhängigkeit der Dichte $\rho = N/V$ aus, wobei N die Anzahl der Teilchen ist. Welchen Beitrag liefert der Hartree-Term?

3. Feynman-Regeln für eine Dreiteilchenwechselwirkung (8 Punkte)

Gegeben sei ein Fermigas mit Spinentartung $n_\mathrm{S} = 2S + 1$ und Dichte $n_\mathrm{S}\rho$, wobei ρ die Dichte pro Spinentartung ist. In diesem Fermigas soll nun eine Dreiteilchenwechselwirkung

$$V(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{r}_k) = \lambda\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)$$

eingeschaltet werden.

(a) Stellen Sie diese Wechselwirkung als Operator im Sinne der zweiten Quantisierung dar.

(b) Führen Sie ein Symbol für die Dreikörperwechselwirkung ein und formulieren Sie die zugehörigen Feynman-Regeln.

(c) Verwenden Sie diese Regeln, um die Wechselwirkungsenergiedichte in erster Ordnung in λ zu berechnen.

Hinweis: Beachten Sie die Symmetriefaktoren der verschiedenen Diagramme.

(d) Begründen Sie, warum die Wechselwirkungsenergie für $n_\mathrm{S} \leq 2$ verschwinden muss.