

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

PROF. A. MIRLIN

Blatt 9

DR. I. V. PROTOPOV, U. BRISKOT, E. KÖNIG

Besprechung 14.06.13

1. Funktionales Feld-Integral und Wick'sches Theorem (12 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir das bosonische funktionale Feld-Integral konstruieren. Dazu verwenden wir kohärente bosonische Vielteilchen-Zustände ($\phi_i = \phi(t, \vec{r})$)

$$|\phi\rangle = e^{\sum_i \phi_i a_i^\dagger} |0\rangle, \quad \phi_i \in \mathbb{C}, \quad [a_i, a_j^\dagger] = 1.$$

(siehe Blatt 5, Aufgabe 2.)

(a) Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation der kohärenten Zustände,

$$\mathbb{1} = \int \prod_i \frac{d\text{Re}\phi_i d\text{Im}\phi_i}{\pi} e^{-\sum_i \phi_i^* \phi_i} |\phi\rangle \langle\phi|. \tag{1}$$

um analog zur Aufgabe 1 von Blatt 3 eine Pfadintegraldarstellung von

$$Z[J = 0] = \langle 0 | \hat{U}(t_i = -\infty, t_f = \infty) | 0 \rangle,$$

zu erhalten. Hierbei beinhaltet $\hat{U}(t_i, t_f)$ den Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung.

Hinweis 1: Die einzelnen Schritte sind:

- Betrachten Sie zunächst endliche Zeiten t_i und t_f und zerstückeln Sie in $\hat{U}(t_i, t_f)$ das Zeitintervall in Teilintervalle $\frac{t_f - t_i}{M}$.
- Fügen Sie in jedem Zeitschritt eine Zerlegung der $\mathbb{1}$ ein.
- Bilden Sie formal den Grenzwert $M \rightarrow \infty$ und danach $t_f \rightarrow +\infty, t_i \rightarrow -\infty$.

Hinweis 2: Ihr Ergebnis sollte dem Grenzfall $J, J^ \rightarrow 0$ von*

$$Z[J^*, J] = \int \mathcal{D}(\text{Re}\phi, \text{Im}\phi) e^{-\int_{-\infty}^{\infty} dt [\int d^d r (\phi^*(t, \vec{r}) i \partial_t \phi(t, \vec{r}) - H(\phi^*, \phi) + J^* \phi + J \phi^*)]}$$

entsprechen.

Die "Vakuum-Amplitude", die wir damit bestimmt haben, ist für $J \neq 0$ ein sogenanntes erzeugendes Funktional und erfüllt ($z_i = (t_i, \vec{r}_i)$, $\phi_i = \phi(z_i)$ und $\mathcal{D}(\text{Re}\phi, \text{Im}\phi) = \mathcal{D}(\phi)$)

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{(-i)^n \delta^n Z[J^*, J]}{\delta J(z_1) \dots \delta J^*(z_n)} \right|_{J=0} = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}(\phi) \phi_1 \dots \phi_n^* e^{i \int dt [\int d^d r \phi^*(z) i \partial_t \phi(z) - H(\phi^*, \phi)]}. \tag{2}$$

Wir betrachten im Weiteren den Hamilton-Operator $H = H_0 + H_{int}$ wobei

$$H_0(\phi(t)) = \int \phi^*(t, \vec{r}) (-\nabla^2 + m^2) \phi(t, \vec{r}) d^d r \quad \text{und} \quad H_{int}(\phi(t)) = g \int |\phi(t, \vec{r})|^4 d^d r.$$

- (b) Berechnen Sie für $g = 0$ den Korrelator $\langle \phi(\omega_1, \vec{k}_1) \phi^*(\omega_2, \vec{k}_2) \rangle$ durch eine Fourier-Transformation des Exponenten in Gleichung (2).

Hinweis: Erinnern Sie sich an Blatt 5, Aufgabe 3.

- (c) Erklären Sie im Kontext von Aufgabenteil b) den Zusammenhang von Wick'schem Theorem und der Relation aus Aufgabe 3 des 5. Blattes. Ist "Gauß-förmigkeit" eine notwendige Bedingung für das Wick'sche Theorem? Begründen Sie.

- (d) Motivieren Sie die diagrammatische (perturbative) Beschreibung des Korrelators $\langle \phi(\omega_1, \vec{k}_1) \phi^*(\omega_2, \vec{k}_2) \rangle$ für endliche Wechselwirkungsstärke g .

Hinweis: Verwenden Sie in Gln. (2) und entwickeln Sie $e^{-i \int dt H_{int}}$.

2. Matsubara-Summe

(5 Punkte)

Berechnen Sie die Summe

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\epsilon_n} \frac{1}{\epsilon_n^2 + a^2} \quad (3)$$

für sowohl fermionische als auch bosonische Matsubara-Frequenzen.

Hinweis: Das Ergebnis für bosonische Frequenzen lautet

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \coth \frac{\beta a}{2}. \quad (4)$$

3. Grassmannvariablen

(8 Punkte)

In Aufgabe 1 haben Sie gezeigt, dass mit Hilfe von bosonischen kohärenten Zuständen die Konstruktion eines funktionalen Feldintegrals möglich ist. In dieser Aufgabe soll die Vorarbeit geleistet werden, um auch für Fermionen ein funktionales Feldintegral zu konstruieren.

Dazu führen wir die Grassmannvariablen η_i ($i = 1, \dots, N$) ein. Sie eignen sich hervorragend zur Beschreibung fermionischer Zustände und bilden eine Algebra, wobei ihre Multiplikation der definierenden Eigenschaft

$$\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i \quad (5)$$

genügt. Eine Funktion von Grassmannvariablen ist über ihre "Taylorreihe" definiert:

$$f(\eta_i) = f(0) + f'(0) \eta_i.$$

Darüber hinaus sind Differentiation und Integration definiert als

$$\partial_{\eta_i} \eta_j = \delta_{i,j}, \quad \int d\eta_i 1 = 0, \quad \int d\eta_i \eta_j = \delta_{i,j}. \quad (6)$$

- (a) Zeigen Sie: $\int d\eta_i f(\eta_i) = \partial_{\eta_i} f(\eta_i)$ und $\{\partial_{\eta_i}, \eta_j\} \stackrel{i \neq j}{=} 0$

- (b) Für $N = 2M$ verwendet man für die Hälfte der Grassmannvariablen häufig die Schreibweise $\eta_{i-M}^* = \eta_i$ ($\forall i = M + 1, \dots, 2M$) ("konjugierte Grassmannvariablen").

Vergewissern Sie sich von: $\prod_i \int d\eta_i^* d\eta_i e^{-\vec{\eta}^\dagger A \vec{\eta} + \vec{\nu}^\dagger \vec{\eta} + \vec{\eta}^\dagger \vec{\nu}} = \text{Det} A e^{\vec{\nu}^\dagger A^{-1} \vec{\nu}}$

Hierbei sind $\vec{\eta}, \vec{\nu}$ Spaltenvektoren bestehend aus den Grassmannvariablen η_i, ν_i und $\vec{\eta}^\dagger, \vec{\nu}^\dagger$ die Zeilenvektoren aus η_i^*, ν_i^* .

- (c) Nun führen wir die Multiplikation von Zuständen durch Grassmannvariablen ein (z.B. $\eta_i |0\rangle$). Die definierende Eigenschaft ist $\{\hat{c}_i, \eta_j\} = 0$ für beliebige fermionische Operatoren \hat{c}_i . Konstruieren Sie mit diesem Wissen fermionische kohärente Zustände und zeigen Sie: $\hat{c}_i^\dagger |\eta\rangle = -\partial_{\eta_i} |\eta\rangle$.