KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

PROF. A. MIRLIN

DR. I. V. PROTOPOPOV, U. BRISKOT, E. KÖNIG

Blatt 14

Besprechung 19.07.13

---

1. Renormierungsgruppenanalyse einer Störstelle (20 Punkte)

In dieser Aufgabe untersuchen wir, wie sich eine Störstelle in einem wechselwirkenden eindimensionalen Draht bei einer Skalenänderung verhält. Der Hamilton-Operator ist

$$H = \pi v_F \int dx \left(\hat{\rho}_+^2(x) + \hat{\rho}_-^2(x)\right) + \frac{g}{2} \int dx \left(\hat{\rho}_+(x) + \hat{\rho}_-(x)\right)^2, \tag{1}$$

hierbei sind

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_+(x) &= \sum_{q>0} \left(\frac{q}{2\pi L}\right)^{1/2} \left(b_q e^{iqx} + b_q^\dagger e^{-iqx}\right) e^{-\frac{a}{2}|q|}, \\ \hat{\rho}_-(x) &= \sum_{q<0} \left(\frac{|q|}{2\pi L}\right)^{1/2} \left(b_q e^{iqx} + b_q^\dagger e^{-iqx}\right) e^{-\frac{a}{2}|q|}, \end{aligned} \tag{2}$$

und die bosonischen Operatoren b_q, $b_q^\dagger$ genügen der Vertauschungsrelation $[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'}$. Der Faktor $e^{-\frac{a}{2}|q|}$ in den beiden Ausdrücken generiert einen effektiven UV-“Cut-Off” bei $q \sim a^{-1} \sim k_F$, da Gleichung (1) ein effektiver niedrig-Energie-Hamilton-Operator ist (siehe Vorlesung). L ist die Länge des Systems.

Wir definieren die Feldoperatoren Φ und Π mit Hilfe der Dichteoperatoren $\rho_\pm$:

$$\phi_\pm(x) = \pm 2\pi \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}s\, \rho_\pm(s), \quad \Phi(x) = \frac{1}{2}(\phi_+(x) - \phi_-(x)), \quad \Pi(x) = \rho_+(x) - \rho_-(x). \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie: $[\Phi(x), \Pi(x')] = i\delta(x - x')$. Was bedeutet das?

(b) Bringen Sie den Hamilton-Operator aus Gleichung (1) auf folgende Form:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}x \left[uK(\pi\Pi(x))^2 + \frac{u}{K}(\partial_x\Phi(x))^2\right]. \tag{4}$$

Hierbei ist $u = v_F/K$ und $v_F + g/\pi = uK^{-1}$.

Die Renormierungsgruppenanalyse wird üblicherweise im Pfadintegral-Formalismus durchgeführt. Wir benötigen also die Wirkung für das in Gleichung (1) definierte System.

(c) Führen Sie eine Legendre-Transformation durch um die Lagrangedichte zu erhalten und bestimmen Sie die Wirkung. Geben Sie anschließend die Pfadintegral-Formulierung an und führen Sie eine Wick-Rotation ($t = -i\tau$) durch.
Hinweis: Sie sollten

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi(x,\tau) e^{-S_E(\Phi)} \quad S_E(\Phi) = \frac{1}{2\pi uK} \int \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \left[(\partial_\tau\Phi(x,\tau))^2 + u^2(\partial_x\Phi(x,\tau))^2\right] \tag{5}$$

erhalten.

Da eine Störstelle untersucht werden soll, fügen wir dem Hamilton-Operator aus Gleichung (1) eine Störstelle hinzu. Diese sei beschrieben durch:

$$V = \int \mathrm{d}x V_0 \delta(x) \Psi^\dagger(x)\Psi(x), \quad \Psi(x) = e^{ik_F x}\psi_+(x) + e^{-ik_F x}\psi_-(x), \quad \psi_\pm(x) = \frac{e^{i\phi_\pm(x)}}{\sqrt{2\pi a}}. \tag{6}$$

(d) Vernachlässigen Sie Vorwärtsstreuung und zeigen Sie, dass die Wirkung aus Gleichung (5) für das System $H + V$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$S_{E,H+V}(\Phi) = \frac{1}{2\pi u K}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \left[(\partial_\tau \Phi(x,\tau))^2 + u^2(\partial_x \Phi(x,\tau))^2\right] + \frac{V_0}{\pi a}\int \mathrm{d}\tau \cos(2\Phi(0,\tau)) \tag{7}$$

Um das Skalenverhalten der Störstelle zu beschreiben benötigen wir eine effektive Theorie, die die Wechselwirkung zwischen Luttinger-Flüssigkeit und Störstelle beschreibt. Es sollen also alle Freiheitsgrade bis auf den an der Störstelle selbst ausintegriert werden.

(e) Verwenden Sie $\delta(\Phi(0,\tau) - \theta(\tau)) = \int \mathcal{D}\lambda(\tau) e^{i\int \mathrm{d}\tau\, \lambda(\tau)[\Phi(0,\tau)-\theta(\tau)]}$ und

$$Z = \int \mathcal{D}\theta(\tau)\mathcal{D}\Phi(x,\tau)\delta(\Phi(0,\tau) - \theta(\tau)) e^{-S_E(\Phi) - \frac{V_0}{\pi a}\int \mathrm{d}\tau \cos(2\theta(\tau))}. \tag{8}$$

Zeigen Sie durch Ausintegrieren des Φ- und λ-Feldes, dass die resultierende Wirkung die Form von Gl. (9) annimmt und führen Sie eine Reskalierung $2\theta = \theta'$ durch.

$$Z = \int \mathcal{D}\theta(\tau) e^{-S_{\text{eff}}[\theta]}, \qquad S_{\text{eff}}[\theta] = T\sum_n \theta_{-n}\frac{|\omega_n|}{\pi K}\theta_n + \frac{V_0}{\pi a}\int \mathrm{d}\tau \cos(2\theta(\tau)). \tag{9}$$

Hinweis: Ein Zwischenergebnis für die effektive λ-Wirkung ist $\frac{1}{4}T\sum_n \lambda_{-n}\frac{\pi k}{|\omega_n|}\lambda_n - iT\sum_n \theta_{-n}\lambda_n$. Verwenden Sie zum Ausintegrieren ihr Ergebnis von Aufgabe 3d) von Blatt 5. Betrachten Sie alle hierbei auftretenden Determinanten als Konstanten.

Wir sind nun in der Lage, mit dem Renormierungsgruppen-Prozedere zu beginnnen. Im Weiteren arbeiten wir mit folgenden Konventionen:

$$T\sum_n \to \int_{|\omega|<\Lambda} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \qquad \text{und} \qquad |\omega_{\text{slow}}| < \Lambda b^{-1} < |\omega_{\text{fast}}| < \Lambda. \tag{10}$$

(f) Zeigen Sie, dass der nicht von der Störstelle stammende Term der Wirkung S_0 "zerfällt" in $S_{0,\text{slow}} + S_{0,\text{fast}}$ ($S_{0,\text{slow}}$ trägt nur Frequenzen ω_{slow}, analog $S_{0,\text{fast}}$).

(g) Bringen Sie Gl.(9) auf die Form:

$$Z = \int \mathcal{D}\theta_{\text{slow}}(\tau) e^{-S_{0,\text{slow}}} \int \mathcal{D}\theta_{\text{fast}}(\tau) e^{-S_{0,\text{fast}}} e^{-c_0\int \mathrm{d}\tau \cos(\theta_{\text{slow}}(\tau)+\theta_{\text{fast}}(\tau))}. \tag{11}$$

Entwickeln Sie anschließend in $c_0 = \frac{V_0}{\pi a} \ll 1$, schreiben Sie den Kosinus in exponentielle Form und integrieren Sie über die "fast modes" θ_{fast}.
Hinweis: Die Wirkung sollte folgende Gestalt annehmen:

$$Z = \int \mathcal{D}\theta_{\text{slow}}(\tau) e^{-S_{0,\text{slow}} - c_0 b^{-K}\int \mathrm{d}\tau \cos(\theta_{\text{slow}}(\tau))}. \tag{12}$$

(h) Reskalieren Sie Gl. (12), um Sie mit Gl. (9) ($2\theta \to \theta$) vergleichen zu können. Wählen Sie die Reskalierung von θ derart, dass das Argument des Kosinuses invariant bleibt. *Hinweis:* $\omega' = b\omega$ *und* $\theta'(\omega')b = \theta(\omega)$

(i) Renormierbarkeit ist dadurch gekennzeichnet, dass bei sukzessivem widerholen des Ausintegrierens und Reskalierens die Gestalt der Wirkung ab einem gewissen Schritt invariant bleibt. Ist die Wirkung aus Gl.(9) renormierbar?

(j) Wie ändert sich c_0 als Funktion von b nach dem Ausintegrieren und Reskalieren? Betrachten Sie $b = 1 + \epsilon$ ($0 < \epsilon \ll 1$) und zeigen Sie $\frac{\mathrm{d}c(b)}{\mathrm{d}\ln b} = c_0(1 - K)$

(k) Nehmen Sie an ihr System hat einen physikalischen "Cut-off" einmal bei $\Lambda_{\mathrm{phys}} \sim T$ und ein anderes mal bei $\Lambda_{\mathrm{phys}} \sim 1/L$. Können Sie Aussagen über das Verhalten der effektiven Kopplung an die Störstelle in Abhängigkeit von T bzw. L machen?

(l) Zeichnen Sie den Renormierungsgruppenfluss tragen Sie hierzu c über K^{-1} auf. Erklären Sie physikalisch, was passiert.