

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 1
Besprechung 22.04.2014

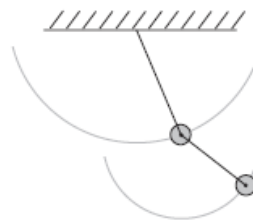
1. Freiheitsgrade:

Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade für die folgenden physikalischen Systeme:

- Ein einfacher Massenpunkt in d Dimensionen, wobei $d = 1, 2, 3$.
- Eine Kugel, bei der die räumliche Ausdehnung nicht vernachlässigt werden soll.
- Ein sphärisches Pendel (siehe Bild).
- Zwei gekoppelte Pendel in einer Ebene (siehe Bild).



Sphärisches Pendel



Zwei gekoppelte Pendel

2. Bahn-/Raumkurven

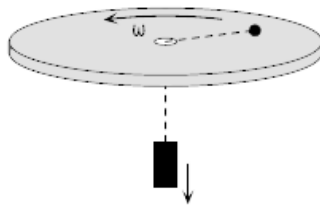
- Eine Raumkurve werde durch die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (a \cos(\omega_1 t), b \sin(\omega_2 t))$ mit $a, b > 0$ beschrieben.
Skizzieren Sie die Kurve für i) $\omega_2 = \omega_1$ bzw. für ii) $\omega_2 = 2\omega_1$.
- Eine Raumkurve werde nun durch die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), ct)$ mit $a, c > 0$ beschrieben.
Skizzieren Sie die Kurve. Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z -Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(1, 0, z_1)$ und $(1, 0, z_2)$, mit $z_2 > z_1$? Die Größe ω bezeichnet oftmals die sog. Kreisfrequenz oder auch die sog. Winkelgeschwindigkeit, t bezeichnet oftmals eine zeitartige Größe.
- Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und den Beschleunigungsvektor für eine Kreisbewegung mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit, gegeben durch den Ortsvektor $\vec{r}(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), 0)$.

Skizzieren Sie ein Teilchen auf dieser Kreisbahn und diskutieren Sie, in welche Richtung der Geschwindigkeits bzw. der Beschleunigungsvektor zeigen. Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde, mit Masse M_E , in einer Entfernung r_s . Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F} = -Gm_sM_E\vec{r}/r^3$ und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet.

- (d) Berechnen Sie für den Satelliten in Aufgabenteil c) dessen Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ in Bezug auf die Erde und zeigen Sie, daß dieser erhalten ist.

3. Rotierende Scheibe

Eine Kugel der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer horizontalen Platte auf einem Kreis (siehe Bild). Die Kugel werde durch einen Faden, der durch ein kleines Loch in der Platte läuft, langsam in das Zentrum der Kreisbewegung gezogen.



Kugel in Kreisbewegung auf einer Platte

Zeigen Sie unter Ausnutzung der Drehimpulserhaltung, daß die Arbeit $E_{pot} = -W(r_{in}, r)$, die man auf die Kugel ausüben muss, um sie von einem Radius r_{in} auf den Radius $r < r_{in}$ zu ziehen, gleich der Zunahme $\Delta E_{kin} = E_{kin}(r) - E_{kin}(r_{in})$ der kinetischen Energie ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (a) Berechnen Sie zunächst den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ bzw. den Betrag des Drehimpulses $L \equiv |\vec{L}|$. Machen Sie sich dazu klar, wie sich der Betrag des Vektor oder Kreuzproduktes berechnen lässt und weiterhin, wie der Winkel zwischen Ortsvektor und Impulsvektor beschaffen ist (siehe 2c)). Parametrisieren Sie das Ergebnis durch die Winkelgeschwindigkeit $\omega \equiv v/r$, mit $v \equiv |\vec{v}|$ und $r \equiv |\vec{r}|$.
- (b) Überlegen Sie sich nun, daß bei dieser zentrumsgetriebenen Kreisbewegung der Kugel die Winkelgeschwindigkeit derselben nicht konstant bleibt, jedoch der Drehimpuls. Nutzen Sie die Drehimpulserhaltung, zwischen zwei Drehimpulsen bei r_{in} und r , um die variable Winkelgeschwindigkeit $\omega(r)$ als Funktion von r und weiteren initialen Parametern wie r_{in} und $\omega(r_{in})$ zu schreiben.
- (c) Berechnen Sie nun die Arbeit $E_{pot} = -W(r_{in}, r)$ durch das in r parametrisierte Arbeitsintegral, d.h.

$$W(r_{in}, r) = \int_{t_{in}}^t dt' \dot{r}(t') F(t') = \int_{r_{in}}^r dr' F(r'),$$

wobei $F = ma$ und $a = v^2/r = \omega^2 r$ die Zentripetalbeschleunigung bezeichnet. Schreiben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von r und $\omega(r)$, und den initialen Parametern r_{in} und $\omega(r_{in})$.

- (d) Berechnen Sie nun die Zunahme $\Delta E_{kin} = E_{kin}(r) - E_{kin}(r_{in})$ der kinetischen Energie. Zeigen Sie, daß sich das Ergebnis umschreiben lässt in die Form des Ergebnisses aus Schritt c) und damit deren Gleichheit.

4. Stoßkinematik

Betrachten Sie einen elastischen Stoß (d.h. einen Stoß, in dem Gesamtimpuls und energie erhalten sind) zweier Kugeln mit Massen m_1 bzw. m_2 und Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 . Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v'_1 bzw. v'_2 der Kugeln nach dem Stoß, wenn die Kugeln zentral zusammenstoßen. Diskutieren Sie das Ergebnis insbesondere unter den Bedingungen $m_1 = m_2$ und weiter $v_2 = 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

- (a) Beim elastischen Stoß können wir von der Erhaltung des Gesamtimpulses ausgehen. Stellen Sie eine Gleichung für die Gesamtimpulserhaltung des Systems der zwei Kugeln, vor und nach dem Stoß, auf.
- (b) Weiter können wir beim elastischen Stoß von der Erhaltung der Gesamtenergie ausgehen, wobei wir nur Terme berücksichtigen müssen, welche kinetischen Energien entsprechen. Stellen also Sie eine Gleichung für die Gesamtenergieerhaltung des Systems der zwei Kugeln, vor und nach dem Stoß, auf.
- (c) Wir haben nun zwei Gleichungen, aus zwei unterschiedlichen Erhaltungssätzen, für zwei unbekannte Geschwindigkeiten v'_1 und v_2 und können somit nach diesen auflösen (wenn wir v_1 vor dem Stoß als die in die positive Richtung gerichtete Geschwindigkeit definieren, so ist v_2 als negativ zu definieren).

5. Wurf eines Balles

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h. eine Bewegung beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F} = -mg \vec{e}_z$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0) = (0, 0, 0)$ und $\vec{v}(t=0) = (v \cos \alpha, 0, v \sin \alpha)$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel bezeichnet und $g \approx 9.81 \text{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung. Welche Form hat die Bahnkurve?

Integrieren Sie dazu die Bewegungsgleichung, unter Benutzung der Anfangsbedingungen, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$, am besten Komponentenweise. Kommentieren Sie die Form der einzelnen Komponenten. Drücken Sie dann z in Abhängigkeit von x aus. Bei welchem Winkel α_{max} erreicht man die maximale Wurfdistanz x_{max} ? Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{fin}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes α_{max} erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum x_{max} .