Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 2
Besprechung 29.04.2014

---

1. Gedämpfter und getriebener harmonischer Oszillator:

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx,$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

(a) Finden Sie die Lösung $x(t)$, $t > 0$, für dieses Anfangswertproblem. Berechnen Sie daraus die Energie des Oszillators und diskutieren Sie die Abhängigkeiten von den Anfangsbedingungen.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

Benutzen Sie den Ansatz $x(t) = c_\lambda e^{\lambda t}$. Durch Einsetzen ergibt sich eine quadratische Gleichung und zwei Lösungen für λ.

Diese zwei Lösungen stellen zwei unabhängige Lösungen dar und eine lineare Superposition dergleichen führt zur allgemeinsten Lösung. Benutzen Sie, um nach den entsprechenden Koeffizienten zu lösen, die allgemeinen Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v0$.

Um schließlich eine einfache Form für das Ergebnis abzuleiten ist es hilfreich $\omega^2 = k/m$ anzusetzen und die Identitäten $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ und $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ anzuwenden.

Nun kann man die funktionelle Form der Energie $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$ in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen untersuchen.

(b) Untersuchen Sie, wie sich die Lösung $x(t)$ ändert, wenn man den Oszillator dämpft, d.h. einer zusätzlichen Reibungskraft aussetzt:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx - 2\rho\frac{dx(t)}{dt}.$$

Wie entwickelt sich die Energie als Funktion der Zeit jetzt? Diskutieren Sie ihr Resultat.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

Als Ansatz kann wieder der Ansatz aus a) gewählt werden, und wieder ergeben sich zwei Werte für λ.

Parametrisieren Sie diese Werte zunachst durch $\alpha = \rho/m$ und $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Es ergeben sich nun tendenziell drei verschiedene Fälle, je nachdem wie groß die Dämpfung ρ gewählt wird:

i) $\alpha^2 \gg \omega^2$ (starke Dämpfung),

ii) $\alpha^2 = \omega^2$ (aperiodischer, kritischer Grenzfall) und

iii) $\alpha^2 \ll \omega^2$ (sschwache Dämpfung)

Diskutieren Sie für diese drei Fälle die Lösungen $x(t)$ unter allgemeinen Anfangsbedigungen, d.h. das Oszillationsverhalten und die Energie als Funktion der Zeit.

Für i) ist es hilfreich die Lösung $x(t)$ durch die Funktionen $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ und $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ auszudrücken.

Fur ii) ist es hilfreich zu sehen, daß auch $x(t) = cte^{\lambda t}$ ein gültiger Ansatz ist.

Fur iii) ergeben sich wieder imaginäre Losungen für die Parameter λ.

(c) Finden Sie die Losung eines gedämpften Oszillators, der nun noch von einer externen periodischen Kraft angetrieben wird

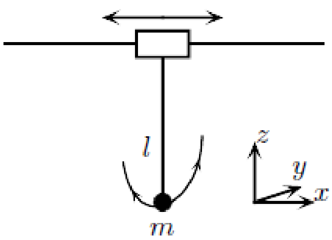
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\rho\frac{dx(t)}{dt} + kx = f_0 \cos\omega_0 t.$$

Diskutieren Sie wieder die Zeitabhängigkeit der Systemenergie. Was passiert für $\omega_0^2 = \omega^2$? Welche Rolle spielt die Reibung hier?

Versuchen Sie sich an der Lösung, indem Sie als allgemeinen Ansatz $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$ verwenden, wobei $x_0(t)$ die Lösung wäre ohne den zusätzlichen Antriebsterm (siehe b)) und $x_p(t)$ die sog. Partikulärlösung, für welche wir die Form $x_p(t) = c_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$ annehmen. Benutzen Sie nur den Partikuläransatz in der obigen Differentialgleichung und die Additionstheoreme für sin und cos um das Resultat zu zwei Termen zu vereinfachen, jeweils proportional zu sin bzw. cos, welche beide unabhängig die Gleichung erfüllen müssen. Dies führt auf eine Bedingung für c_0.

2. Lagrangegleichungen und Pendel:

(a) Eine Masse hängt von einem kleinen Zylinder herunter, welcher sich frei und ohne Reibung in der horizontalen xRichtung bewegen kann (siehe Bild).



Frei beweglicher Zylinder mit Masse.

Die Länge des Seiles sei konstant gleich l. Das Pendel habe dabei die Möglichkeit in der yz-Ebene zu schwingen. Bestimmen Sie

i) die Lagrange funktion $L(\phi, x, \dot{\phi}, \dot{x}, t)$,

ii) die zugehörigen Bewegungsgleichungen, und

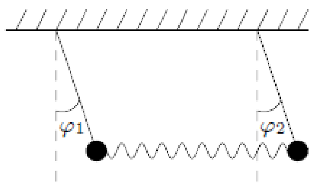
iii) die Erhaltungssätze, welche man mit Hilfe der zyklischen Koordinaten finden kann.

Zu i): Allgemein gilt für die Lagrangefunktion $L = T - V$, wobei $T = m\vec{v}^2/2$ die gesamte kinetische Energie und $V = mgz$ die gesamte potentielle Energie bezeichnen. Da y und z nicht unabhängig sind (warum?) führen wir neue Koordinaten $(x, y, z) \rightarrow (x, r, \phi)$ ein, durch $(x = x, y = r\sin\phi, z = -r\cos\phi)$. Wie lautet die Nebenbedigung des Pendels in diesen Koordinaten? Wie lautet L in diesen Koordinaten?

Zu ii): Wenden Sie die EulerLagrangeGleichungen jeweils für die Koordinatensätze $(x, \dot{x})$ und $(\phi, \dot{\phi})$ an. Dies führt auf zwei unabhängige Bewegungsgleichungen für die unabhängigen Koordinaten.

Zu iii): Wenn die Lagrangefunktion L nicht von einer Koordinate q abhängt, sondern nur von der zugehörigen Geschwindigkeit $\dot{q}$, dann nennt man q zyklische Koordinate. Für zyklische Koordinaten q gilt natürlich $\partial L/\partial q = 0$ und daraus folgt, daß $\partial L/\partial \dot{q}$ erhalten ist (warum?).

(b) Betrachten Sie nun zwei durch eine Feder gekoppelte Pendel gleicher Länge l und Masse m (siehe Bild).



Durch eine Feder gekoppelte Pendel.

Bestimmen Sie

i) die Lagrangefunktion $L(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, t)$,

ii) die zugehörigen Bewegungsgleichungen, wobei sich hierbei ein Gleichungssystem zweier gekoppelter Gleichungen ergibt, und

iii) lösen Sie das Gleichungssytem durch Einfuhr der entsprechenden Normalkoordinaten und diskutieren Sie die zugehörigen Schwingungszustände für die unterschiedlichen Fälle der Gleichschwingung $(\phi_2 = \phi_1)$, der Gegenschwingung $(\phi_2 = \phi_1)$ und der Schwebung $(\phi_2(t = 0) \neq 0, \phi_1(t = 0) = 0)$. Was fällt insbesondere bei der Schwebung auf?

Zu i): Überlegen Sie sich, daß die kinetische Energie eines einzelnen Pendels gegeben ist durch $T_i = m_i l_i^2 \dot{\phi}_i^2$ und die potentielle Energie eines einzelnen Pendels durch $V_i = -m_i g l_i \cos\phi_i$. Wie ist der interferierende Anteil der gesamten potentiellen Energie, welcher sich aus der Federkopplung zwischen den zwei Pendeln ergibt?

Zu ii): Nutzen Sie die TaylorNäherungen erster Ordnung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für kleine x und setzen Sie dann die EulerLagrangeGleichungen bezüglich der Koordinatensätze $(\phi_1, \dot{\phi}_1)$ und $(\phi_2, \dot{\phi}_2)$ an.

Zu iii): Um auf die linear unabhängigen Normalkoordinaten zu kommen, machen Sie den Versuch, die zwei Gleichungen einmal voneinander zu subtrahieren und einmal zueinander zu addieren. Dies entkoppelt die Gleichungen. Was sind die daraus resultierenen Normalkoordinaten, in Abhängigkeit der Winkel ϕ_1 und ϕ_2, welche nun jeweils eine der entkoppelten Gleichungen lösen?