Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. B. Narozhny

Blatt 13: Lösungen

Besprechung 15.07.2014

---

1. Drehimpulsoperator:

Hier benutzen wir die Kommutatoren

$$\left[\hat{L}_i, \hat{x}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{x}_k, \quad \left[\hat{L}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k,$$

und die Eigenschaften

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right],$$

$$\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}.$$

(a) "Skalaroperatoren"

$$\left[\hat{L}_i, \hat{\vec{r}}^{\,2}\right] = \left[\hat{L}_i, \hat{\vec{p}}^{\,2}\right] = \left[\hat{L}_i, \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right] = 0$$

Es gilt für jeden Skalaroperator $\hat{f}$:

$$\left[\hat{L}_i, \hat{f}\right] = 0.$$

(b) "Vektoroperatoren"

$$\left[\hat{L}_i, \left(\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right)\hat{p}_k\right] = i\hbar\epsilon_{ikn}\left(\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right)\hat{p}_n.$$

$$\left[\hat{L}_i, \left(\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right)\hat{x}_k\right] = i\hbar\epsilon_{ikn}\left(\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right)\hat{x}_n.$$

$$\left[\hat{L}_i, a\hat{x}_k + b\hat{p}_k\right] = i\hbar\epsilon_{ikn}\left(a\hat{x}_n + b\hat{p}_n\right).$$

Es gilt für jeden Vektoroperator $\hat{f}_j$:

$$\left[\hat{L}_i, \hat{f}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{f}_k.$$

(c) “Tensoroperatoren”

$$\left[\hat{L}_i, \hat{x}_k\hat{x}_l\right] = i\hbar\left(\epsilon_{ikp}\delta_{nl} + \epsilon_{iln}\delta_{kp}\right)\hat{x}_p\hat{x}_n,$$

$$\left[\hat{L}_i, \hat{p}_k\hat{p}_l\right] = i\hbar\left(\epsilon_{ikp}\delta_{nl} + \epsilon_{iln}\delta_{kp}\right)\hat{p}_p\hat{p}_n,$$

$$\left[\hat{L}_i, \hat{x}_k\hat{p}_l\right] = i\hbar\left(\epsilon_{ikp}\delta_{nl} + \epsilon_{iln}\delta_{kp}\right)\hat{x}_p\hat{p}_n.$$

Es gilt für jeden Tensoroperator $\hat{f}_{kl}$:

$$\left[\hat{L}_i, \hat{f}_{kl}\right] = i\hbar\left(\epsilon_{ikp}\delta_{nl} + \epsilon_{iln}\delta_{kp}\right)\hat{f}_{pn}.$$

2. Leiteroperatoren:

Hier benutzen wir die Kommutatoren

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k,$$

und zwar

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm.$$

(a) “die Eigenwerte des Operators $\hat{L}_z$”

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_\pm\psi_m\right) = \hat{L}_\pm\left(\hat{L}_z\psi_m\right) \pm \hbar\hat{L}_\pm\psi_m = \hbar\left(m \pm 1\right)\left(\hat{L}_\pm\psi_m\right).$$

(b) “der Zustand ψ_m”

Es folgt von der Orthogonalität der Eigenfunktionen:

$$\langle m|\hat{L}_\pm|m\rangle \propto \langle m|m \pm 1\rangle = 0,$$

und

$$\langle m|\hat{L}_\pm^2|m\rangle \propto \langle m|m \pm 2\rangle = 0.$$

Deswegen

$$\langle \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle \hat{L}_x\rangle = \langle \hat{L}_y\rangle = 0,$$

und

$$\left\langle \hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 \pm i\left(\hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x\right)\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{L}_x^2\rangle = \langle \hat{L}_y^2\rangle, \quad \langle \hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x\rangle = 0.$$

(c) "die Zustände $|l,m\rangle$"

Für $l=1$ haben die Operatoren $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ nur die folgenden Eigenwerte: $0, \pm\hbar$. Deswegen finden wir

$$\hat{L}_x^3 = \hbar^2 \hat{L}_x, \qquad \hat{L}_y^3 = \hbar^2 \hat{L}_y.$$

Wir haben schon gefunden dass

$$\langle \hat{L}_x \rangle = \langle \hat{L}_y \rangle = 0.$$

Die Mittlewerte der Operatoren $\hat{L}_x^2$ und $\hat{L}_y^2$ finden wir von

$$\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 = \hat{\vec{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \right\rangle = \hbar^2 \left[l(l+1) - m^2 \right].$$

Deswegen (siehe die Aufgabe 2b)

$$\langle 1,m|\hat{L}_x^2|1,m\rangle = \langle 1,m|\hat{L}_y^2|1,m\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(2-m^2\right).$$

Letztendlich finden wir (hier $k \in \mathbb{N}$)

$$\langle 1,m|\hat{L}_x^{2k}|1,m\rangle = \langle 1,m|\hat{L}_y^{2k}|1,m\rangle = \frac{\hbar^{2k}}{2}\left(2-m^2\right),$$

$$\langle 1,m|\hat{L}_x^{2k+1}|1,m\rangle = \langle 1,m|\hat{L}_y^{2k+1}|1,m\rangle = 0.$$