Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 2: Lösungen
Besprechung 29.04.2014

---

1. Harmonischer Oszillator:

(a) "Ein Oszillator"

Ansatz

$$x(t) = c_\lambda e^{\lambda t}$$

Die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) \quad \Rightarrow \quad m\lambda^2 c_\lambda e^{\lambda t} = -kc_\lambda e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

Allgemeine Lösung ($\omega = \sqrt{k/m}$)

$$\lambda = \pm i\omega \quad \Rightarrow \quad x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Die Konstante findet man von der Anfangsbedingungen:

$$x(0) = c_1 + c_2 = x_0, \quad \dot{x}(0) = i\omega(c_1 - c_2) = v_0$$

Das Ergebnis

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

Die Energie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m}{2}\left[v_0\cos\omega t - x_0\omega\sin\omega t\right]^2 + \frac{k}{2}\left[x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right]^2$$

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}$$

(b) "Gedämpfter oszillator"

Ansatz

$$x(t) = c_\lambda e^{\lambda t}$$

Die Bewegungsgleichung ($\alpha = \rho/m$):

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} - 2\frac{\rho}{m}\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{-\alpha t + \sqrt{\alpha^2-\omega^2}t} + c_2 e^{-\alpha t - \sqrt{\alpha^2-\omega^2}t}$$

Die Energie

$$E = \frac{m}{2}\left[-c_1\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-\omega^2}\right)e^{-\alpha t+\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t} - c_2\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-\omega^2}\right)e^{-\alpha t-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t}\right]^2$$
$$+\frac{k}{2}\left[c_1 e^{-\alpha t+\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t} + c_2 e^{-\alpha t-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t}\right]^2$$

$$E = e^{-2\alpha t}\left[\frac{m}{2}\left[c_1\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-\omega^2}\right)e^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t} + c_2\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-\omega^2}\right)e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t}\right]^2\right.$$
$$\left.+\frac{k}{2}\left[c_1 e^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t}\right]^2\right]$$

Die Energie fällt "exponentiell" ab:

$$\beta = \alpha - \sqrt{\alpha^2-\omega^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad E \propto e^{-\beta t}$$

Die Grenzfälle:
i) $\alpha^2 \gg \omega^2$
In diesem Fall

$$\sqrt{\alpha^2-\omega^2} - \alpha \approx -\frac{\omega^2}{2\alpha}, \qquad \sqrt{\alpha^2-\omega^2} + \alpha \approx 2\alpha, \qquad \frac{\omega^2}{\alpha} \ll \alpha$$

Dann

$$x(t) \approx c_1 e^{-\omega^2 t/\alpha} + c_2 e^{-2\alpha t}$$

ii) $\alpha^2 = \omega^2$
Hier $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$, deswegen brauchen wir noch einen Ansatz. Das ergibt:

$$x(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 t e^{-\alpha t}$$

iii) $\alpha^2 \ll \omega^2$
In diesem Fall

$$\sqrt{\alpha^2-\omega^2} = i\omega_1, \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega^2-\alpha^2}$$

Dann:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_1 t}\right] = c e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

(c) "Getriebener oszillator"

Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega_0 t$$

Wir suchen die Lösung als

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t),$$

wobei $x_0(t)$ die allgemeine Lösung ohne den Antriebterm (siehe oben) ist und $x_p(t)$ eine Partikularlösung ist. Für die Partikularlösung:

$$x_p(t) = c\cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

Dann

$$\dot{x}_p(t) = -\omega_0 c\sin(\omega_0 t - \varphi_0), \quad \ddot{x}_p(t) = -\omega_0^2 c\cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

Jetzt die Bewegungsgleichung:

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\cos(\omega_0 t - \varphi_0) - 2\alpha\omega_0\sin(\omega_0 t - \varphi_0) = \frac{f_0}{c}\cos\omega_0 t$$

Benutzen wir die Formeln:

$$\cos(\omega_0 t - \varphi_0) = \cos\omega_0 t\cos\varphi_0 + \sin\omega_0 t\sin\varphi_0$$

$$\sin(\omega_0 t - \varphi_0) = \sin\omega_0 t\cos\varphi_0 - \cos\omega_0 t\sin\varphi_0$$

Jetzt haben wir zwei Gleichungen:

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\cos\varphi_0 + 2\alpha\omega_0\sin\varphi_0 = \frac{f_0}{c}$$

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\sin\varphi_0 - 2\alpha\omega_0\cos\varphi_0 = 0$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & 2\alpha\omega_0 \\ -2\alpha\omega_0 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \frac{f_0}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \frac{f_0/c}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2}\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 \\ 2\alpha\omega_0 \end{pmatrix}$$

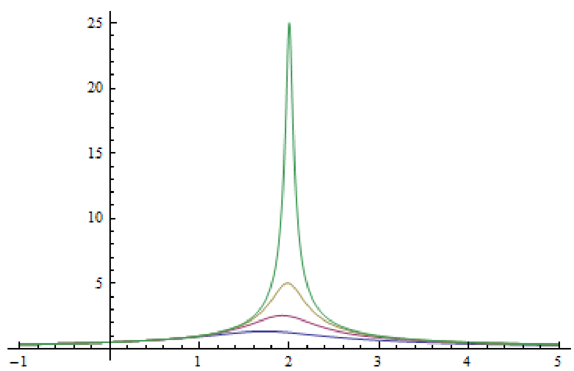
Davon folgt es:

$$\tan\varphi_0 = \frac{2\alpha\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad c = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2}}$$

Die Resonanz:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{f_0}{2\alpha\omega_0}$$

Die Resonanzkurven:



2. Lagrangegleichungen und Pendel:

(a) “Frei beweglicher Zylinder mit Masse”

i) Die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} + mgl\cos\phi$$

ii) Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\phi} + mgl\sin\phi = 0$$

iii) Die Erhältungssätze

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = const$$

(b) “zwei gekoppelte Pendel”

i) Die Lagrangefunktion

$$L = \frac{ml^2\dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\phi}_2^2}{2} + mgl\cos\phi_1 + mgl\cos\phi_2$$
$$-\frac{k}{2}\left[\sqrt{l^2\left(\cos\phi_1 - \cos\phi_2\right)^2 + \left[l(\sin\phi_1 - \sin\phi_2) - R\right]^2} - R\right]^2$$

Für kleine Schwingungen

$$L = \frac{ml^2\dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\phi}_2^2}{2} - \frac{mgl\phi_1^2}{2} - \frac{mgl\phi_2^2}{2} - \frac{kl^2}{2}\left(\phi_1 - \phi_2\right)^2$$

ii) Die Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen

$$ml^2\ddot{\phi}_1 = mgl\phi_1 + kl^2\left(\phi_1 - \phi_2\right)$$
$$ml^2\ddot{\phi}_2 = mgl\phi_2 + kl^2\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

iii) Normalkoordinaten
Führen wir die neue Koordinaten:

$$\varphi_+ = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_- = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\sqrt{2}}$$

Dann

$$\varphi_+^2 + \varphi_-^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$$

Deswegen

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}_+^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}_-^2}{2} - \frac{mgl\varphi_+^2}{2} - \frac{mgl\varphi_-^2}{2} - kl^2\varphi_-^2$$

Die neue Bewegungsgleichungen

$$ml^2\ddot{\varphi}_+ + mgl\varphi_+ = 0, \qquad ml^2\ddot{\varphi}_- + mgl\varphi_- + 2kl^2\varphi_- = 0$$

Die Lösung

$$\varphi_+ = c_1 \cos\left(\omega_1 t + \alpha\right), \qquad \varphi_- = c_2 \cos\left(\omega_2 t + \beta\right), \qquad \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

Schwebungen:

$$\phi_2(t=0) = \phi_0 \neq 0, \qquad \phi_1(t=0) = 0, \qquad \dot{\phi}_1(t=0) = \dot{\phi}_2(t=0) = 0$$

Dann

$$\varphi_+(t=0) = -\varphi_-(t=0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}, \qquad \dot{\varphi}_+(t=0) = \dot{\varphi}_-(t=0) = 0$$

Deswegen

$$\varphi_+ = \frac{\phi_0}{\sqrt{2}} \cos\omega_1 t, \quad \varphi_- = -\frac{\phi_0}{\sqrt{2}} \cos\omega_2 t$$

oder

$$\phi_1 = \frac{\phi_0}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right), \qquad \phi_2 = \frac{\phi_0}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)$$

oder

$$\phi_1 = -\phi_0 \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right), \quad \phi_2 = \phi_0 \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

Schwache Kupplung: $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$