Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 4: Lösungen
Besprechung 13.05.2014

---

1. Alternativen zur Newton'schen Mechanik:

(a) "Die Lagrangefunktion"

Die Lagrangefunktion eines freien Teilchens

$$L(x, \dot{x}; t) = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Die Bewegungsgleichung des freien Teilchens

$$m\ddot{x} = 0.$$

(b) "Die Hamilton-Funktion"

Die kinetische Energie

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Der Impuls

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Die kinetische Energie in Abhängigkeit des Impulses

$$K(p) = \frac{p^2}{2m}$$

Die Hamilton-Funktion

$$H(x, p; t) = \frac{p^2}{2m}$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p} = 0,$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

(c) “Newton’schen Gleichungen”

Die Newton’sche Gleichung

$$ma = F$$

Die Newton’sche Gleichung eines freien Teilchens

$$F = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ma = 0$$

Die Beschleunigung durch die Geschwindigkeit

$$a = \ddot{x}$$

Äquivalenz zu der Lagrange-Gleichung

$$ma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = 0$$

Beschleunigung durch den Impuls

$$a = \ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m}$$

Äquivalenz zu den Hamilton-Gleichungen

$$ma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{p} = 0, \quad p = m\dot{x}$$

2. Hamilton-Funktion:

(a) ‘Zwei Massen”

Im Blatt 3 haben wir die Lagrangefunktion gefunden

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right] + m_2 g l \cos\varphi$$

Die Impulse

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi$$

Geschwindigkeiten als Funktionen von Impulsen

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_\varphi/l \end{pmatrix} = \widehat{M}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ l\dot{\varphi} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{M} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2\cos\varphi \\ m_2\cos\varphi & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ l\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \widehat{M}^{-1}\begin{pmatrix} p_x \\ p_\varphi/l \end{pmatrix}, \qquad \widehat{M}^{-1} = \frac{1}{m_2(m_1 + m_2\sin^2\varphi)}\begin{pmatrix} m_2 & -m_2\cos\varphi \\ -m_2\cos\varphi & m_1 + m_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x - (p_\varphi/l)\cos\varphi}{m_1 + m_2\sin^2\varphi}$$

$$l\dot\varphi = \frac{(m_1+m_2)p_\varphi/l - p_x m_2\cos\varphi}{m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)}$$

Die Hamilton-Funktion

$$H = \sum p_q\dot q - L = p_x\dot x + p_\varphi\dot\varphi - L = p_x\dot x + (p_\varphi/l)l\dot\varphi - L$$

$$H = p_x\frac{p_x-(p_\varphi/l)\cos\varphi}{m_1+m_2\sin^2\varphi} + (p_\varphi/l)\frac{(m_1+m_2)p_\varphi/l - p_x m_2\cos\varphi}{m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)} - L =$$

$$= \frac{p_x^2}{m_1+m_2\sin^2\varphi} - \frac{2p_x p_\varphi\cos\varphi}{(m_1+m_2\sin^2\varphi)l} + \frac{(m_1+m_2)p_\varphi^2}{m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)l^2} - L$$

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\left[\frac{p_x-(p_\varphi/l)\cos\varphi}{m_1+m_2\sin^2\varphi}\right]^2 + \frac{m_2}{2}\left[\frac{(m_1+m_2)p_\varphi/l - p_x m_2\cos\varphi}{m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)}\right]^2$$

$$+m_2\frac{p_x-(p_\varphi/l)\cos\varphi}{m_1+m_2\sin^2\varphi}\frac{(m_1+m_2)p_\varphi/l - p_x m_2\cos\varphi}{m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)}\cos\varphi + m_2 gl\cos\varphi$$

$$= \frac{p_x^2}{2(m_1+m_2\sin^2\varphi)} - \frac{p_x p_\varphi\cos\varphi}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)} + \frac{(m_1+m_2)p_\varphi^2}{2m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)l^2} + m_2 gl\cos\varphi$$

$$H = \frac{p_x^2}{2(m_1+m_2\sin^2\varphi)} - \frac{p_x p_\varphi\cos\varphi}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)} + \frac{(m_1+m_2)p_\varphi^2}{2m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)l^2} - m_2 gl\cos\varphi$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\dot p_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \dot p_x = 0$$

$$\dot x = \frac{\partial H}{\partial p_x} \qquad \Rightarrow \qquad \dot x = \frac{p_x}{m_1+m_2\sin^2\varphi} - \frac{p_\varphi\cos\varphi}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)}$$

$$\dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \dot p_\varphi = -m_2 gl\sin\varphi - \frac{p_x p_\varphi\sin\varphi}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)}$$

$$+\frac{m_2 p_x^2 l^2 - 2m_2 p_x p_\varphi l\cos\varphi + (m_1+m_2)p_\varphi^2}{m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)^2 l^2}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \dot\varphi = \frac{(m_1+m_2)p_\varphi}{m_2(m_1+m_2\sin^2\varphi)l^2} - \frac{p_x\cos\varphi}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)}$$

(b) "Zwei gekoppelte Pendel"

Im Blatt 3 haben wir die Lagrangefunktion gefunden

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)\, g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Die Impulse

$$p_{\varphi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$p_{\varphi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Geschwindigkeiten als Funktionen von Impulsen

$$\begin{pmatrix} p_{\varphi_1} \\ p_{\varphi_2} \end{pmatrix} = \widehat{M} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{M} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \widehat{M}^{-1} \begin{pmatrix} p_{\varphi_1} \\ p_{\varphi_2} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{M}^{-1} = \frac{1}{m_2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 & -m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & (m_1 + m_2) l_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{m_2 l_2^2 p_{\varphi_1} - m_2 l_1 l_2 p_{\varphi_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{(m_1 + m_2) l_1^2 p_{\varphi_2} - m_2 l_1 l_2 p_{\varphi_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]}$$

Die Hamilton-Funktion

$$H = \sum p_q \dot{q} - L = p_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + p_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2 - L$$

$$\begin{aligned} H = p_{\varphi_1} & \frac{m_2 l_2^2 p_{\varphi_1} - m_2 l_1 l_2 p_{\varphi_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} \\ & + p_{\varphi_2} \frac{(m_1 + m_2) l_1^2 p_{\varphi_2} - m_2 l_1 l_2 p_{\varphi_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} - L \\ = & \frac{p_{\varphi_1}^2}{l_1^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} - \frac{2 p_{\varphi_1} p_{\varphi_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} \\ & + \frac{(m_1 + m_2) p_{\varphi_2}^2}{m_2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} - L \end{aligned}$$

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\left[\frac{m_2l_2^2p_{\varphi_1}-m_2l_1l_2p_{\varphi_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{m_2l_1^2l_2^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}\right]^2+(m_1+m_2)\,gl_1\cos\varphi_1$$

$$+\frac{m_2}{2}l_2^2\left[\frac{(m_1+m_2)l_1^2p_{\varphi_2}-m_2l_1l_2p_{\varphi_1}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{m_2l_1^2l_2^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}\right]^2+m_2gl_2\cos\varphi_2$$

$$+m_2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\,\frac{m_2l_2^2p_{\varphi_1}-m_2l_1l_2p_{\varphi_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{m_2l_1^2l_2^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}$$

$$\times\frac{(m_1+m_2)l_1^2p_{\varphi_2}-m_2l_1l_2p_{\varphi_1}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{m_2l_1^2l_2^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}$$

$$=\frac{p_{\varphi_1}^2}{2l_1^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}-\frac{p_{\varphi_1}p_{\varphi_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{l_1l_2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}$$

$$+\frac{(m_1+m_2)p_{\varphi_2}^2}{2m_2l_2^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}+(m_1+m_2)\,gl_1\cos\varphi_1+m_2gl_2\cos\varphi_2$$

$$H=\frac{p_{\varphi_1}^2}{2l_1^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}-\frac{p_{\varphi_1}p_{\varphi_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{l_1l_2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}$$

$$+\frac{(m_1+m_2)p_{\varphi_2}^2}{2m_2l_2^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}-(m_1+m_2)\,gl_1\cos\varphi_1-m_2gl_2\cos\varphi_2$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\dot p_{\varphi_1}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi_1}\qquad\Rightarrow$$

$$\dot p_{\varphi_1}=-(m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi_1-\frac{p_{\varphi_1}p_{\varphi_2}\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{l_1l_2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}$$

$$+\frac{m_2l_2^2p_{\varphi_1}^2-2m_2l_1l_2p_{\varphi_1}p_{\varphi_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)+(m_1+m_2)l_1^2p_{\varphi_2}^2}{2m_2l_1^2l_2^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]^2}\sin 2(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$\dot\varphi_1=\frac{\partial H}{\partial p_{\varphi_1}}\qquad\Rightarrow$$

$$\dot\varphi_1=\frac{p_{\varphi_1}}{l_1^2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}-\frac{p_{\varphi_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{l_1l_2[m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)]}$$

$$\dot{p}_{\varphi_2} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{p}_{\varphi_2} = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2 + \frac{p_{\varphi_1} p_{\varphi_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]}$$

$$- \frac{m_2 l_2^2 p_{\varphi_1}^2 - 2 m_2 l_1 l_2 p_{\varphi_1} p_{\varphi_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 p_{\varphi_2}^2}{2 m_2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]^2} \sin 2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi_2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{(m_1 + m_2) p_{\varphi_2}}{m_2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} - \frac{p_{\varphi_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)]}$$

3. Lagrange und Hamilton am Kegel:

(a) “Die Lagrangefunktion”

Unabhängige Koordinaten - z und φ. Kartesische Koordinaten:

$$x = z \tan\alpha \cos\varphi, \quad y = z \tan\alpha \sin\varphi$$

Die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} \left(1 + \tan^2\alpha\right) + \frac{m z^2 \dot{\varphi}^2}{2} \tan^2\alpha - mgz$$

(b) “Die Bewegungsgleichungen”

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\left(1 + \tan^2\alpha\right)\ddot{z} + mg - m z \dot{\varphi}^2 \tan^2\alpha = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\left(z^2 \ddot{\varphi} + 2 z \dot{z} \dot{\varphi}\right) \tan^2\alpha = 0$$

(c) “Die Impulse”

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\left(1 + \tan^2\alpha\right)\dot{z}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m z^2 \dot{\varphi} \tan^2\alpha$$

(d) “Die Hamilton-Funtion”

$$H = \frac{p_z^2}{2m\,(1+\tan^2\alpha)} + \frac{p_\varphi^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz$$

Die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p}_z = -mg + \frac{p_\varphi^2}{2mz^3\tan^2\alpha}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m\,(1+\tan^2\alpha)}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p}_\varphi = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mz^2\tan^2\alpha}$$

(e) “Äquivalenz der Bewegungsgleichungen”

Von die letzten zwei Hamilton-Gleichungen

$$p_\varphi = \dot{\varphi} m z^2 \tan^2\alpha, \quad \dot{p}_\varphi = 0$$

findet man die letzten Lagrange-Gleichung.
Die erste Lagrange-Gleichung folgt von:

$$p_\varphi = \dot{\varphi} m z^2 \tan^2\alpha, \quad p_z = m\left(1+\tan^2\alpha\right)\dot{z}$$

und die erste Hamilton-Gleichung