Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 6: Lösungen
Besprechung 27.05.2014

---

1. Eichsymmetrie:

Das Magnetfeld:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

Die Eichtransformation:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla}\chi.$$

Jetzt berechnen wir das Magnetfeld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}' - \vec{\nabla}\chi.\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}' - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$$

weil

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial y} \right) - \vec{e}_y \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Die Eichtransformation

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi' + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Jetzt berechnen wir das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\varphi' + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}' - \vec{\nabla}\chi\right) = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

weil

$$\vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi$$

2. Die Maxwell-Gleichungen:

Die übliche Form der Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

Die Felder

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Die 4-Vektoren

$$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right), \quad j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right), \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Die Lorentz-Eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Die relativistische Form der Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

Betrachten wir jetzt diese Gleichungen. Benutzen wir die explizite Form des Diffirenzialoperators

$$\partial_\nu \partial^\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Die Komponente $\mu = 0$:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^0 = \mu_0 j^0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\partial_\nu \partial^\nu \varphi = \mu_0 c \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Die Komponenten $\mu = 1, 2, 3$:

$$\partial_\nu \partial^\nu \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Diese Gleichungen sind die Wellengleichungen für die Potentiale.

Jetzt leiten wir diese Gleichungen ven der üblichen Form der Maxwell-Gleichungen her:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

und infolge der Lorentz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Deswegen,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Die zweite und dritte Maxwell-Gleichungen sind durch einführung der Potentiale automatisch erfüllt. Betrachten wir jetzt die letzte Gleichung. Einsetzen wir erst den Ausdruck für das Magnetfeld,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$$

dann das elektrische Feld

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

und dann schreiben wir die linke Seite der Gleichung als

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\left(-\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A}$$

Hier haben wir noch einmal die Lorentz-Eichung benutzt.

Die Gleichung ist dann

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

3. Zeitdilatation:

(a) "Classische Rechnung"

$$d = \tau v \quad \Rightarrow \quad d = 2.197 \times 10^{-6}\text{s} \cdot 0.98.3 \times 10^{8}\text{m/s} = 645.9\text{m}$$

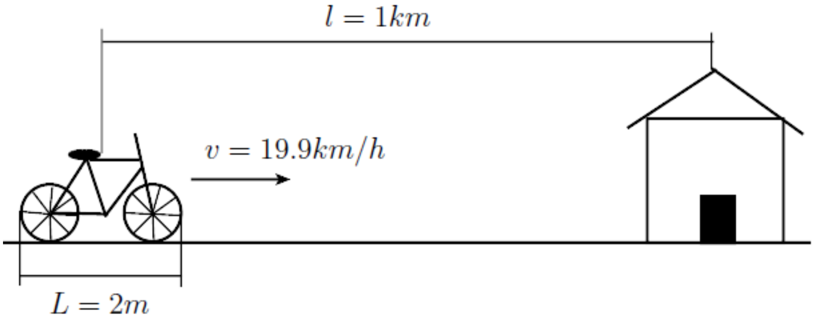
(b) "Relativistische Rechnung"
Die Zerfallszeit gilt im Ruhesystem des Myons. Deswegen

$$d' = \tau' v \quad \text{where} \quad \tau' = \tau\gamma \qquad \Rightarrow \qquad d' = \gamma d = 3246\text{m}$$

Hier

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

4. Längekontraktion:



(a) "Wie lang ist die Strecke"
Im Ruhesystem

$$l = 1\text{km}$$

Im Bezugssystem des Autos

$$l' = l/\gamma = 99.875\text{m}$$

(b) "Wie lang ist das Auto"
Im Ruhesystem (Bezugssystem des Autos)

$$L' = 2\text{m}$$

Im Bezugssystem des Beobachters

$$L = L'/\gamma = 0.1998\text{m}$$

(c) "Wie lange dauert die Fahrt"
Im Bezugssystem des Autos

$$t' = l'/v = 18.068\text{s}$$

Im Bezugssystem des Beobachters

$$t = l/v = 180.9\text{s}$$