Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 8: Lösungen
Besprechung 10.06.2014

---

1. Lineare Operatoren:

Die Operatoren $\hat{I}$, $\hat{T}_a$, $\hat{M}_c$, und $\hat{P}_{12}$ sind lineare Operatoren. Der Operator $\hat{K}$ ist kein lineare Operator.

a. Adjungierte Operatoren

Betrachten wir z.B. die Parallelverschiebung. Wir finden den adjungierten Operator von der Gleichung

$$\int \Psi^*(x)\hat{T}_a\Phi(x)dx = \int \left[\hat{T}_a^\dagger\Psi(x)\right]^* \Phi(x)dx.$$

Explizit:

$$\int \Psi^*(x)\hat{T}_a\Phi(x)dx = \int \Psi^*(x)\Phi(x+a)dx = \int \Psi^*(x-a)\Phi(x)dx.$$

Deswegen

$$\hat{T}_a^\dagger\Psi(x) = \Psi(x-a) = \hat{T}_{-a}\Psi(x).$$

Ganz ähnlich finden wir für die anderen Operatoren:

- $$\int \Psi^*(x)\hat{I}\Phi(x)dx = \int \Psi^*(x)\Phi(-x)dx = \int \Psi^*(-x)\Phi(x)dx.$$

  Deswegen

  $$\hat{I}^\dagger\Psi(x) = \Psi(-x) = \hat{I}\Psi(x).$$

- $$\int \Psi^*(x)\hat{M}_c\Phi(x)dx = \sqrt{c}\int \Psi^*(x)\Phi(cx)dx = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \Psi^*(x/c)\Phi(x)dx.$$

  Deswegen

  $$\hat{M}_c^\dagger\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}\Psi(x/c) = \hat{M}_{1/c}\Psi(x).$$

- $$\int \Psi^*(x_1,x_2)\hat{P}_{12}\Phi(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int \Psi^*(x_1,x_2)\Phi(x_2,x_1)dx_1dx_2$$
$$= \int \Psi^*(x_2,x_1)\Phi(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

  Deswegen
$$\hat{P}_{12}^\dagger\Psi(x_1,x_2) = \Psi(x_2,x_1) = \hat{P}_{12}\Psi(x_1,x_2).$$

b. Inverse Operatoren.

   Für allen Operatoren können wir die inversen Operatoren finden:
$$\hat{I}^{-1} = \hat{I}; \quad \hat{T}_a^{-1} = \hat{T}_{-a}; \quad \hat{M}_c^{-1} = \hat{M}_{1/c}; \quad \hat{K}^{-1} = \hat{K}; \quad \hat{P}_{12}^{-1} = \hat{P}_{12}.$$

2. Impulsoperator:

(a) Selbstadjungierter Operator:

Für jede Komponente des Impulsoperators gilt es:
$$\int \varphi\hat{p}_x\psi dx = -i\hbar\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\hbar\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int\psi\hat{p}_x^*\varphi dx.$$
Benotigen Sie, dass die beide Funktionen φ und ψ im unendlichen verschwinden müssen.

(b) Eigenwerte und Eigenvektoren

Das Eigenwertproblem stellen wir mit der Hilfe der folgenden Vektorgleichung dar:
$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi = \vec{p}\psi.$$
Die Lösung ist durch die Fourier-Transformation gegeben:
$$\psi_{\vec{p}} = Ce^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$
Die Konstante findet man von der Normalisierung
$$\int \psi_{\vec{p}'}^*\psi_{\vec{P}}dV = (2\pi\hbar)^3\delta^{(3)}\left(\vec{p}-\vec{p}'\right),$$
wobei $\delta^{(3)}\left(\vec{p}\right)$ eine dreidimensionale Delta-Funktion ist. Hier benutzen wir das Integral
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dze^{i\alpha z} = \delta(z),$$

und die Tatsache dass

$$\delta^{(3)}(\vec{p}) = \delta(p_x)\delta(p_y)\delta(p_z).$$

Das ergibt

$$C = 1.$$

D.h., die Eigenvektoren des Impulsoperators sind

$$\psi_{\vec{p}} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Benotigen Sie dass hier

$$|\psi|^2 = 1.$$

Die Eigenwerte sind die "Impulse" $\vec{p}$:

$$\hat{\vec{p}}\psi_{\vec{p}} = \vec{p}\psi_{\vec{p}}.$$

3. Zweizustandssystem:

(a) Eigenwerte und Eigenvektoren der Pauli-Matrizen

Betrachten wir den Operator $\hat{\sigma}_x$:

$$\hat{\sigma}_x\psi_{s_x} = s_x\psi_{s_x} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s_x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Auf der linken Seite haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

deswegen haben wir die folgenden Gleichungen:

$$b = s_x a, \qquad a = s_x b.$$

Das ergibt die Eigenwerte

$$s_x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad s_x = \pm 1.$$

Hier für $s_x = 1$ finden wir $a = b$ (und für $s_x = -1$ finden wir $a = -b$). Letztendlich benutzen wir die Normalisierung

$$\langle\psi_{s_x}|\psi_{s_x}\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

und finden die Eigenvektoren:

$$\psi_{s_x=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi_{s_x=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ähnlicherweise finden wir für die anderen Pauli-Matrizen:

$$\psi_{s_y=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \psi_{s_y=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\psi_{s_z=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_{s_z=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Erwartungswert des Operators $\hat{\sigma}_x$ in einem von der Eigenzuständen des Operators $\hat{\sigma}_z$

$$\langle\psi_{s_z=1}|\hat{\sigma}_x|\psi_{s_z=1}\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 0.$$

(c) Eigenvektoren des Operators $\hat{\sigma}_z$ in der Basis der Eigenvektoren des Operators $\hat{\sigma}_x$

$$\psi_{s_z=1} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{s_x=1} + \psi_{s_x=-1}\right],$$

$$\psi_{s_z=-1} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{s_x=1} - \psi_{s_x=-1}\right].$$