Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B)   Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 4. Abgabe: 13.05.2016
Besprechung: 17.05.2016

---

1. Ein Teilchen im elektromagnetischen Feld (2+2+3+8+10=25 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines Teilchens mit der Ladung Q im zeitlich konstanten elektromagnetischen Feld lautet

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - Q\Phi(\vec{r}) + Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}).$$

Dabei ist $\Phi(\vec{r})$ das elektrische Skalarpotential und $\vec{A}(\vec{r})$ das Vektorpotenzial,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}), \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}).$$

(a) Beweisen Sie die in der Vorlesung benutzte Formel:

$$\sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \left(\vec{\nabla} A_j - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \right) = \dot{\vec{r}} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{A} \right].$$

(b) Bestimmen Sie den verallgemeinerten (kanonischen) Impuls und die Energie des Teilchens.

(c) Betrachten Sie den Fall der räumlich homogenen Felder, $\vec{E} \parallel x$-Achse und $\vec{B} \parallel z$-Achse, d.h. $\vec{E}(\vec{r}) = (E, 0, 0)$ und $\vec{B}(\vec{r}) = (0, 0, B)$. Geben Sie das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ an. Zeigen Sie, dass $\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = (0, Bx, 0)$ und $\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = (-By/2, Bx/2, 0)$ dem gegebenen magnetischen Feld entsprechen.

(d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für den obigen Fall homogener Felder her. Zeigen Sie, dass die Transformation $y(t) = \tilde{y}(t) - (E/B)t$ das elektrische Feld aus den Gleichungen eliminiert, und geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen an. Wie sehen die Bahnkurven des Teilchen aus?

(e) Bestimmen Sie die Bahnkurve eines geladenen Teilchens im Magnetfeld $\vec{B} = b\vec{r}/r^3$ (diese Form hat ein magnetisches Feld in der Nähe der Enden einer langen dünnen Magnetspule).

2. Zwei Teilchen im elektromagnetischen Feld (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegung von zwei geladenen Teilchen (Masse: m_1, m_2, Ladungen: Q_1, Q_2) im homogenen elektrischen Feld mithilfe der Gleichungen für ihren Massenmittelpunkt und für ein Teilchen der Masse $m = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ in einem bestimmten Feld beschrieben werden kann.

(b) Unter welchen Bedingungen entkoppeln die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunktskoordinate und für die Relativbewegung der zwei geladenen Teilchen im homogenen Magnetfeld?

3. Variationsrechnung: Problem des schnellsten Falles

(2+3+3+2+5=15 Punkte)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft entlang einer Kurve $y(x)$ vom Anfangspunkt $A = (0, 0)$ zum Endpunkt $B = (x_B, y_B)$, s. Abb. 1. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist null. Der Tiefpunkt der Bahn kann tiefer liegen als der Endpunkt.
Wie muss man $y(x)$ wählen, damit die Zeit T, die das Teilchen für den Weg von A nach B braucht, minimal ist? Im folgenden sollen Sie diese Fragestellung mithilfe der Varationsrechnung beantworten.

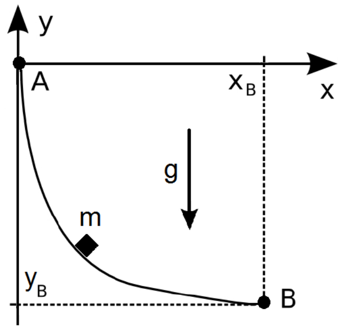

Abb. 1.

(a) Starten Sie (begründen Sie dies auch) von dem Ausdruck

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v},$$

wobei v den Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet. Drücken Sie das Element der Bogenlänge ds durch dx und $dy/dx \equiv y'(x)$ aus.

(b) Finden Sie die Geschwindigkeit aus dem Energiesatz und stellen Sie T in der Form eines Funktionals

$$T[y(x)] = \int_0^{x_B} K(y(x), y'(x))dx$$

dar.

(c) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen für ein Extremum dieses Funktionals an.

(d) Zeigen Sie in Analogie zur Energieerhaltung in der Mechanik eines Teilchens in einem zeitlich konstanten Potential, dass die Größe

$$I = y' \frac{\partial K}{\partial y'} - K$$

konstant (d.h. unabhängig von x) ist.

(e) Damit erhalten Sie eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{-y}{\alpha + y}}.$$

Was ist α als Funktion von I? Diese Differentialgleichung kann über die Substitution $y = -(1-\cos\tau)\alpha/2$ leicht gelöst werden. Die Kurve ist durch die Parameterdarstellung $y(\tau)$ und $x(\tau)$ gegeben. Finden Sie $x(\tau)$. Skizzieren Sie die Lösungskurven $y(x)$. Welche Steigung hat die Kurve am Anfangspunkt?