KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE | INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

**Klassische Theoretische Physik II (Theorie B)   Sommersemester 2016**

**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
**PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris**

**Blatt 6. Abgabe: 27.05.2016**
**Besprechung: 31.05.2016**

---

**1. Die Wirkung** (4+4+4+8=20 Punkte)

Betrachten Sie eine eindimensionale Bewegung mit dem festen Anfangs- und Endpunkt $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$. Bestimmen Sie die Bahnkurven und berechnen Sie die Wirkung $S(x_1, t_1; x_2, t_2)$ und ihre Ableitungen $\partial S/\partial x_2,\ \partial S/\partial t_2$ in den drei Fällen:

**(a)** freies Teilchen der Masse $m$;

**(b)** ein Teilchen im Schwerefeld der Erde;

**(c)** harmonischer Oszillator (ein Teilchen im quadratischen Potential).

Betrachten Sie nun kleine Ablenkungen $\Delta x(t)$ (nicht mit einer infinitesimalen Variation $\delta x(t)$ zu verwechseln) von den genauen Bahnkurven, die Sie für die drei obengenannten Fälle bestimmt haben. Lassen Sie die Anfangsbedingungen fest: $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$.

**(d)** Zeigen Sie für die Fälle (a) und (b), dass die Wirkung auf der genaue Bahnkurven das absolute Minimum hat, d.h. $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) > 0$ gilt.

**5 Bonuspunkte:** Für welche Zeiten $t_2 - t_1$ besitzt $\Delta S$ für den Fall (c) ein absolutes Minimum?

**2. Prinzip der kleinsten Wirkung: Kugel im Schwerefeld** (3+4+3=10 Punkte)

Der schiefe Wurf einer Kugel der Masse $m$ im Schwerefeld der Erde soll durch Variation aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung berechnet werden. Die Kugel bewegt sich in der $x$-$z$-Ebene, die Schwerkraft zeigt in negative $z$-Richtung.

**(a)** Berechnen Sie die Wirkung für die Kugel mit dem Ansatz $x(t) = x_0 + v_x t + at^2$ und $z(t) = z_0 + v_z t + bt^2$.

**(b)** Bestimmen Sie die Konstanten des Ansatzes so, dass $S$ extremalisiert wird. Dabei sind die Endpunkte der Bahn einzusetzen, $x(0) = z(0) = 0$, $x(T) = x_m$, $z(T) = 0$. Wie lautet die Bahn, die von der Kugel tatsächlich durchlaufen wird?

**(c)** Bestimmen Sie die Lagrangegleichungen und vergleichen Sie deren spezielle Lösung mit dem Ergebnis aus (b).

**3. Prinzip der kleinsten Wirkung: Harmonischer Oszillator** (10 Punkte)

Minimieren Sie die Wirkung für den harmonischen Oszillator (Masse $m$, Frequenz $\omega$, Periode $T = 2\pi/\omega$)

$$S_{T/4} = \int_0^{T/4} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)), \qquad x(0) = 0, \quad x(T/4) = 1$$

mit dem Ansatz $x(t) = a + bt + ct^2$ bezüglich der Parameter $a$, $b$ und $c$. (Berücksichtigen Sie die oben gegebenen Randbedingungen!) Skizzieren Sie das so gewonnene $x(t)$ und vergleichen Sie es mit der exakten Lösung des harmonischen Oszillators.