Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 9. Abgabe: 17.06.2016
Besprechung: 21.06.2016

---

1. Foucault-Pendel (8+7+5=20 Punkte)

Ein mathematisches Pendel befindet sich in einem Punkt P der Nordhalbkugel der Erdoberfläche mit der geographischen Breite ϕ. Wenn die Erddrehung vernachlässigt wird, werden die Pendelschwingungen bei kleinen Auslenkungen durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben:

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2.$$

Hier zeigen die $\hat{e}_{1,2}$-Achsen tangentiell zur Erdoberfläche in P (z.B., $\hat{e}_1$ nach Süden und $\hat{e}_2$ nach Osten), und die $\hat{e}_3$-Achse senkrecht zur Erdoberfläche in P nach oben. Insbesondere, mit den Anfangsbedingungen $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$ und beliebige $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$ schwingt das Pendel ausschließlich in der x_1x_3-Ebene.

Die Aufgabe ist, den Einfluss der Erddrehung auf die Pendelschwingung zu berechnen. Es ist angenommen, dass die Frequenz der Erddrehung $\omega = 2\pi/(24 \text{ Std})$ viel kleiner als ω_0 ist.

(a) Geben Sie die (gekoppelte) Differentialgleichungen für x_1 und x_2 in dem rotierenden (nicht-inertialen) System an, das mit der sich drehenden Erde fest verbunden ist. Nutzen Sie dazu die aus der Vorlesung bekannten Transformationseigenschaften von Geschwindigkeiten und Basisvektoren unter Rotationen.

(b) Führen Sie die komplexe Koordinate $w = x_1 + ix_2$ ein, und reduzieren Sie damit das System der Differentialgleichungen auf eine komplexe Differentialgleichung. Lösen Sie diese Gleichung mit dem Ansatz $w(t) = Ce^{i\lambda t}$.

(c) Bestimmen Sie mit welcher Winkelgeschwindigkeit sich die Ebene dreht, in der das Pendel schwingt. Um wieviel Grad pro Stunde dreht sich die Schwingungsebene eines Foucault-Pendels in Karlsruhe ($\phi = 49^\circ$)? In welche Richtung?

2. Drehmatrizen (6+6+8=20 Punkte)

Ein Zusammenhang zwischen den Komponenten von Vektoren in zwei Koordinatensystemen ist durch eine Matrixtransformation der Koordinaten

$$\vec{x}' = D\vec{x} \quad \text{oder} \quad x'_i = \sum_{j=1}^{3} D_{ij} x_j$$

gegeben. Eine beliebige Drehmatrix D kann wie folgt durch die eulerschen Winkel parametrisiert werden: $D(\varphi, \theta, \psi) = D(\hat{z}, \psi) D(\hat{x}, \theta) D(\hat{z}, \varphi)$, wobei

$$D(\hat{z}, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(\hat{x}, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

die Drehung um die z- bzw. x-Achse beschreiben.

(a) Finden Sie durch explizite Matrixmultiplikation die Drehmatrix $D(\varphi, \theta, \psi)$. Berechnen Sie $D^T(\varphi, \theta, \psi) D(\varphi, \theta, \psi)$ und $\det(D(\varphi, \theta, \psi))$.

(b) Finden Sie die Drehmatrix $D(\hat{y}, \alpha)$ für eine Drehung um einen Winkel α um die y-Achse im raumfesten Koordinatensystem. Finden Sie die eulerschen Winkel für $D(\hat{y}, \alpha)$. Bestimmen Sie $D^T(\hat{y}, \alpha) D(\hat{y}, \alpha)$ und $\det(D(\hat{y}, \alpha))$.

(c) Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\omega_i = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_i$ im körperfesten Koordinatsystem sind durch die eulerschen Winkel $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ als

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\omega_1 = \sum_j D_{3j} \dot{D}_{2j}, \quad \omega_2 = \sum_j D_{1j} \dot{D}_{3j}, \quad \omega_3 = \sum_j D_{2j} \dot{D}_{1j}$$

gelten, wobei $D_{ik}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$ die Komponenten der Drehmatrix sind.