Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B)   Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 11.
Besprechung: 05.07.2016

---

1. Eiskunstläufer (10 Punkte)

Ein Eiskunstläufer dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/\mathrm{sec}$, wobei seine Hände ausgestreckt sind. Wie schnell wird er sich drehen, wenn er die Hände an seinen Körper anlegt?
Betrachten Sie den Körper des Kunstläufers als einen homogenen Zylinder mit dem Radius $R = 20\,\mathrm{cm}$ und der Masse $M = 70\,\mathrm{kg}$, und die Arme als homogene (unendlich dünne) Stäbe jeweils mit der Länge $L = 70\,\mathrm{cm}$ und der Masse $m = 4.5\,\mathrm{kg}$ (s. Abb. 1).

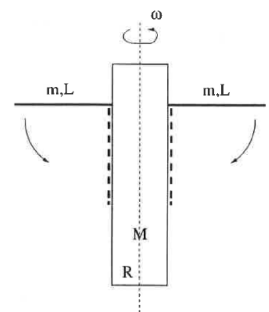
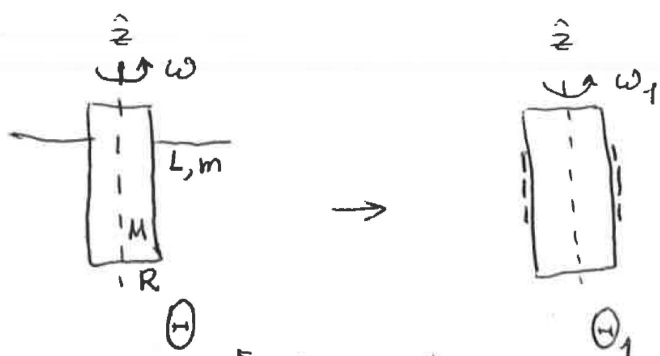


Abbildung 1.

Lösung:



$M = 70\,\mathrm{kg}$
$m = 4.5\,\mathrm{kg}$
$R = 20\,\mathrm{cm}$
$L = 70\,\mathrm{cm}$

Trägheitsmoment bezüglich z-Achse

Drehimpulserhaltung $\Rightarrow \quad \omega\Theta = \omega_1\Theta_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega\dfrac{\Theta}{\Theta_1}$

$$\Theta = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Körper}}}{\Theta_K} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Arme}}}{\Theta_A} \qquad \Theta_1 = \Theta_K + \Theta_A'$$

$$\Theta_K = M\frac{\int_0^R dr\, r \cdot r^2}{\int_0^R dr\, r} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\Theta_A = 2m \int_R^{R+L} r^2 dr / L = 2m \frac{(R+L)^3 - R^3}{3L} = \frac{2m}{3L}(L^3 + 3L^2R + 3LR^2)$$
$$= 2m\left(\frac{L^2}{3} + LR + R^2\right)$$

oder: $$\Theta_A = 2\left[m \frac{\int_{-L/2}^{L/2} dr\, r^2}{L} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2\right]$$ (Steinerscher Satz)

$$= 2\left[m\frac{L^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2\right] = 2m\left(\frac{L^2}{3} + RL + R^2\right)$$

$$\Theta_A' = 2mR^2$$

$$\omega_1 = \omega \frac{\frac{MR^2}{2} + 2m\left(\frac{L^2}{3} + RL + R^2\right)}{\frac{MR^2}{2} + 2mR^2} = 2.55\,\omega = 2.55 \cdot 2\pi \text{ sec}^{-1}$$
$$= 2.55 \text{ Drehung/Sekunde}$$

2. Symmetrischer Kreisel mit konstantem Drehmoment (10 Punkte)

Auf einen symmetrischen Kreisel wirkt das konstante Drehmoment $\vec{M} = M_0 \hat{e}_z$. Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die eulerschen Winkel an. Lösen Sie die eulerschen Gleichungen für die Anfangsbedingungen $\omega(0) = 0$ und $\hat{e}_3(0) = \hat{e}_z$. Geben Sie die Zeitabhängigkeit der Eulerwinkel an.

Lösung:

Symmetrischer Kreisel: $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$.

Eulersche Gleichungen für den symmetrischen Kreisel:

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_2\omega_3 = M_1, \quad \text{(A2.1)}$$
$$\Theta_1\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 = M_2, \quad \text{(A2.2)}$$
$$\Theta_3\dot{\omega}_3 = M_3. \quad \text{(A2.3)}$$

In diese Gleichungen setzen wir die eulerschen Winkel ein:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\
\dot{\omega}_1 &= \ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi + \ddot{\theta}\cos\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi, \\
\omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\
\dot{\omega}_2 &= \ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi - \ddot{\theta}\sin\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi, \\
\omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}, \\
\dot{\omega}_3 &= \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\psi}.
\end{aligned}$$

Mit

$$\hat{e}_z = \sin\theta \sin\psi\, \hat{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\, \hat{e}_2 + \cos\theta\, \hat{e}_3$$

erhalten wir für $\vec{M} = M_0 \hat{e}_z$

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0\hat{e}_z\cdot\hat{e}_1 = M_0\sin\theta\sin\psi, \\ M_2 &= M_0\hat{e}_z\cdot\hat{e}_2 = M_0\sin\theta\cos\psi, \\ M_3 &= M_0\hat{e}_z\cdot\hat{e}_3 = M_0\cos\theta. \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen für die eulerschen Winkel:

$$\begin{aligned} \Theta_1(\ddot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\psi + \dot\varphi\dot\psi\sin\theta\cos\psi + \ddot\theta\cos\psi - \dot\theta\dot\psi\sin\psi) \\ +(\Theta_3-\Theta_1)(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi)(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = M_0\sin\theta\sin\psi, \\ \Theta_1(\ddot\varphi\sin\theta\cos\psi + \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\cos\psi - \dot\varphi\dot\psi\sin\theta\sin\psi - \ddot\theta\sin\psi - \dot\theta\dot\psi\cos\psi) \\ +(\Theta_1-\Theta_3)(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi)(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = M_0\sin\theta\cos\psi, \\ \Theta_3(\ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta + \ddot\psi) = M_0\cos\theta. \end{aligned}$$

Zurück zu Gln. (A2.1 – A2.2) mit Anfangsbedingungen $\omega(0) = 0$ und $\hat{e}_3(0) = \hat{e}_z$. Im raumfesten Koordinatensystem xyz gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = M_0\hat{e}_z \;\Rightarrow\; L_z = M_0 t, \quad L_x = L_y = 0.$$

Im körperfesten Hauptachsensystem erhalten wir

$$\begin{aligned} L_1 &= \Theta_1\omega_1 = M_0 t\hat{e}_z\cdot\hat{e}_1 = M_0 t\sin\theta\sin\psi, \\ L_2 &= \Theta_1\omega_2 = M_0 t\hat{e}_z\cdot\hat{e}_2 = M_0 t\sin\theta\cos\psi, \\ L_3 &= \Theta_3\omega_3 = M_0 t\hat{e}_z\cdot\hat{e}_3 = M_0 t\cos\theta. \end{aligned}$$

Es folgt daraus:

$$\dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi = \frac{M_0}{\Theta_1}t\sin\theta\sin\psi, \tag{A2.4}$$

$$\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi = \frac{M_0}{\Theta_1}t\sin\theta\cos\psi, \tag{A2.5}$$

$$\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi = \frac{M_0}{\Theta_3}t\cos\theta \tag{A2.6}$$

und aus Gl. (A2.4)$\times\cos\psi -$ Gl. (A2.5)$\times\sin\psi$: $\dot\theta = 0$.
Anfangsbedingungen $\omega(0) = 0$ und $\hat{e}_3(0) = \hat{e}_z \;\Rightarrow\; \theta(0) = 0 \;\Rightarrow$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{M_0}{\Theta_3}t$$

und

$$\theta(t) = 0, \quad \varphi(t) + \psi(t) = \varphi_0 + \psi_0 + \frac{M_0 t^2}{2\Theta_3},$$

z.B. erhält man für die Anfangsbedingung $\theta(0) = \theta_0$ im Limes $\theta_0 \to 0$ die folgende Lösung für die Winkel φ und ψ:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{M_0 t^2}{2\Theta_1}, \quad \psi(t) = \psi_0 + \frac{M_0(\Theta_1-\Theta_3)t^2}{2\Theta_1\Theta_3},$$

mit den beliebigen Winkel φ_0 und ψ_0.

3. Drehmoment senkrecht zum Drehimpuls (4+6=10 Punkte)

Auf einen starren Körper wirke ein Drehmoment der Form $\vec{M} = M_0 \hat{e}_z \times \vec{L}/|\vec{L}|$, wobei $\vec{L}$ der Drehimpuls des Körpers und $\hat{e}_z$ der Einheitsvektor des raumfesten Koordinatensystem xyz sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ zu $|\vec{L}| = \text{const} \equiv L_0$ und $L_z = \text{const}$ führt.

Lösung:

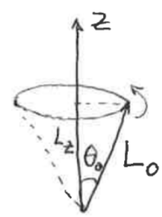
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,; \qquad \vec{M} = M_0\, \vec{e}_z \times \frac{\vec{L}}{L}$$

$$M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad L_z = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{L}^2}{dt} = 2\vec{L}\,\frac{d\vec{L}}{dt} = 2\vec{L}\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{L}| = \text{const} \equiv L_0$$

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung in xyz-Koordinaten und finden Sie die Winkelgeschwindigkeit ω der Präzession des Drehimpulsvektors $\vec{L}$ um die z-Achse.

Lösung:



$$\cos\theta_0 = \frac{L_z}{L_0}$$

In Koordinaten:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dL_x}{dt} = -M_0 \dfrac{L_y}{L_0} \\[2ex] \dfrac{dL_y}{dt} = M_0 \dfrac{L_x}{L_0} \\[2ex] \dfrac{dL_z}{dt} = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} L_x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ L_y = A\sin(\omega t + \varphi) \end{array}$$

beliebige Phase

$$A = L_0 \sin\theta_0$$

$$\boxed{\omega = \frac{M_0}{L_0}}$$

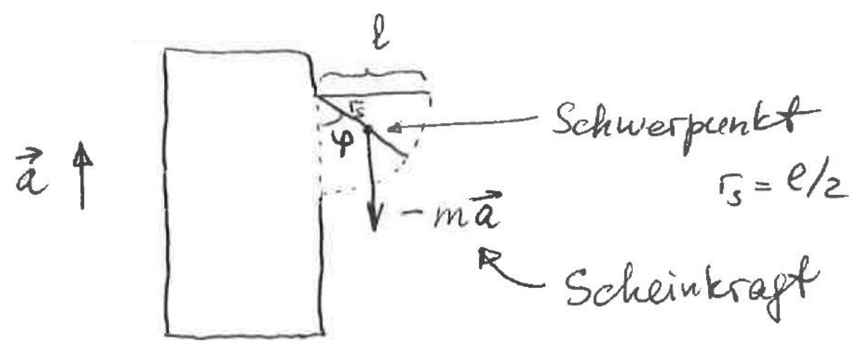
4. Autotür (10 Punkte)

Ein Automobil starte aus dem Stand mit konstanter Beschleunigung a. Eine der Autotüren sei anfangs senkrecht zur Fahrtrichtung geöffnet. Die Tür wird als eine homogene rechtwinklige Fläche mit der Seitenlänge l betrachtet. Sobald das Automobil Geschwindigkeit gewinnt, wird die Tür zuschlagen (die Scharniere der Tür liegen vorn; die Reibung in den Scharnieren ist vernachlässigbar). Berechnen Sie die zum Schließen der Tür notwendige Zeit t für $a = 1\text{m/sec}^2$ und $l = 1\text{m}$.

Hilfsformel:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi}} \simeq 2.62206\,.$$

Lösung:



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{F} = -m\vec{a}, \qquad \vec{\omega} \parallel \hat{z}$$

$$\vec{L} = \Theta\,\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = -\frac{m a r_s}{\Theta} \sin\varphi = -\frac{m a \ell}{2\Theta} \sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m a l}{2\Theta} \sin\varphi, \qquad \Theta = m \frac{\int_0^\ell dx\, x^2}{\ell} = \frac{m\ell^2}{3}$$

Anfangsbedingung
$\dot{\varphi} = 0, \ \cos\varphi = 0$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{a}{\ell}\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{a}{\ell}\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{3a}{\ell}\cos\varphi}$$

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{3a}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}}_{= 2.62206\ldots} \simeq 1{,}514 \sqrt{\ell/a} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \ell = 1\text{m} \\ a = 1\text{m/sec}^2 \end{array}\right| \rightarrow t = 1{,}514 \text{ sec}$$

5. Bonusaufgabe: Präzession der Erdachse

(10+5=15 Bonuspunkte)

Wir benutzen nun die Ergebnisse von Aufgabe 3, um die Präzession der Erdachse abzuschätzen. Die Präzession wird durch die Drehmomente verursacht, die die Sonne und der Mond ausüben. Im Laufe der Zeit übernehmen daher unterschiedliche Sterne die Rolle des "Polarsterns" als Drehpunkt des Sternhimmels und Wegweiser nach Norden.

Der Schwerpunkt der Erde wird als Ursprung des Koordinatensystems gewählt. Der Vektor $\vec{d}_S$ zur Sonne liege in der xy-Ebene (Ekliptik-Ebene). Die Figurenachse (x_3) der Erde (Süd–Nord) ist um den Winkel $\theta_0 = 23.5^o$ gegenüber der z-Achse geneigt. Das Drehmoment der Gravitationskraft, die die Sonne auf die Erde ausübt, ist durch

$$\vec{M}_S = G\mathcal{M}_S \int_V d^3r\rho(\vec{r})\ \vec{r} \times \frac{\vec{d}_S - \vec{r}}{|\vec{d}_S - \vec{r}|^3} \tag{1}$$

gegeben, wobei G – die Gravitationskonstante, $\mathcal{M}_S$ – die Sonnenmasse und $\rho(\vec{r})$ – die Dichte der Erde sind, und die Integration das Erdvolumen umfasst.

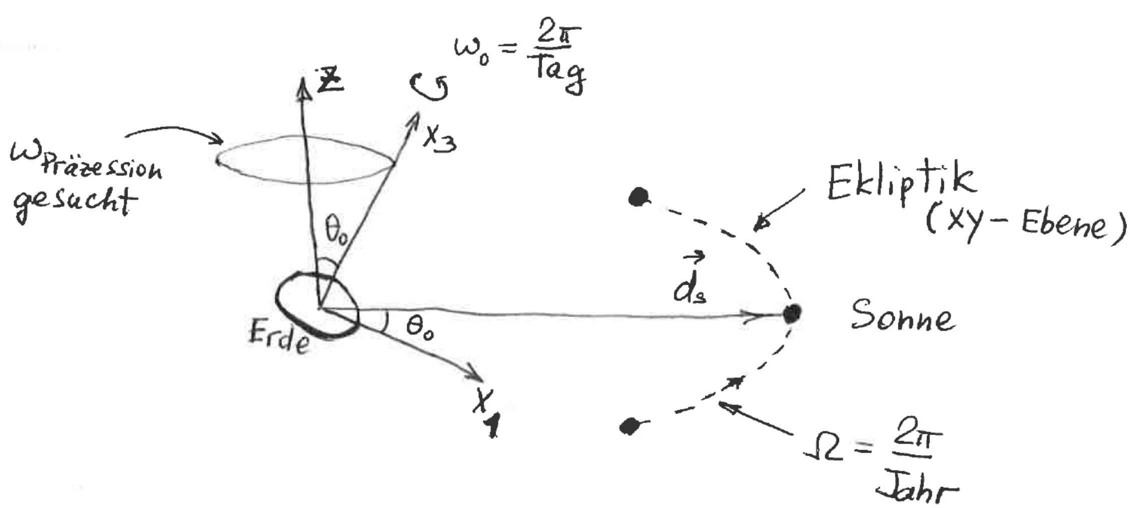
Für das vom Mond ausgeübte Drehmoment ergibt sich dieselbe Formel mit entsprechender Substitution $\mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_M$, $\vec{d}_S \to \vec{d}_M$.

(a) Wählen Sie das $x_1x_2x_3$-Koordinatensystem (Hauptachsen-System für die Erde) mit x_2-Achse senkrecht zur zx_3-Ebene ($\hat{e}_3 \times \hat{e}_z = -\sin\theta_0 \hat{e}_2$). Finden Sie die Komponenten des Vektors $\vec{d}_S$ in diesem System. Zeigen Sie, dass für das zeitgemittelte (über eine Periode des Sonnenumlaufs) Drehmoment $\langle \vec{M}_S \rangle$ gilt:

$$\langle \vec{M}_S \rangle = \frac{3}{2} \frac{G\mathcal{M}_S}{|\vec{d}_S|^3} (\Theta_3 - \Theta_1) \cos\theta_0 (\hat{e}_3 \times \hat{e}_z), \tag{2}$$

wobei Θ_i die Hauptträgheitsmomente der Erde bezeichnen; $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$. Hier ist natürlich angenommen, dass $|\vec{d}_S| \gg R_E$ mit R_E – Radius der Erde.

Lösung:



$x_1 x_2 x_3$ - System:

Projektion auf $x_1 x_3$-Ebene

$$\vec{d_s} \longrightarrow d_s\left[\cos\Omega t\,(\cos\theta_0, 0, \sin\theta_0) + \sin\Omega t\,(0,1,0)\right]$$

$\Omega = 2\pi/\text{Jahr}$

$$M_s = G\mathcal{M}_s \int d^3r\,\rho(\vec r)\,\frac{\vec r\times(\vec d_s - \cancel{\vec r})}{|\vec d_s - \vec r|^3}$$

$|\vec r| \le R_E \ll d_s \longrightarrow$ Entwicklung in $\frac{r}{d_s}$

$$\frac{1}{|\vec d_s - \vec r|^3} = \frac{1}{(d_s^2 + r^2 - 2\vec r\vec d_s)^{3/2}} = \frac{1}{d_s^3}\left(1 - \frac{2\vec r\vec d_s}{d_s^2} + \frac{r^2}{d_s^2}\right)^{-3/2}$$

$$\simeq \frac{1}{d_s^3}\left(1 + \frac{3\vec r\vec d_s}{d_s^2} + O\left(\frac{R^2}{d_s^2}\right)\right)$$

$\downarrow$

0, weil $\int d^3r\,\rho(\vec r)\,\vec r = 0$

$$\Rightarrow \vec M_s \simeq \frac{3G\mathcal{M}_s}{d_s^5}\int d^3r\,\rho(\vec r)\,(\vec r\times\vec d_s)\,(\vec r\vec d_s)$$

$\langle\cos^2\Omega t\rangle = \langle\sin^2\Omega t\rangle = \frac{1}{2}$; $\quad\langle\cos\Omega t\,\sin\Omega t\rangle = 0$

$\int d^3\vec r\,\rho(\vec r)\,r_i r_j = 0$ für $i\neq j$ (Hauptachsen-System) $\Rightarrow$

$$\langle\vec M_s\rangle = \frac{3G\mathcal{M}_s}{d_s^5}\,\frac{1}{2}d_s^2\int d^3r\,\rho(\vec r)\left(-\cos\theta_0\sin\theta_0\,r_1^2\,\hat e_2 + \sin\theta_0\cos\theta_0\,r_3^2\,\hat e_2\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{G\mathcal{M}_s}{d_s^3}\sin\theta_0\cos\theta_0\,(\Theta_3 - \Theta_1)\,\hat e_2 = \frac{3}{2}\frac{G\mathcal{M}_s}{d_s^3}\cos\theta_0\,(\Theta_3-\Theta_1)\,(\hat e_3\times\hat e_z)$$

(b) Das gesamte Drehmoment ist die Summe $\langle \vec{M}_S \rangle + \langle \vec{M}_M \rangle$. Berechnen Sie mithilfe der Aufgabe 3(b) die Präzessionsfrequenz der Erdachse x_3 um die Ekliptik-Achse z. Benutzen Sie die folgenden Werte der Parameter: $G = 6.7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$, $|\vec{d}_S| = 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, $|\vec{d}_M| = 3.8 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$, $\mathcal{M}_S = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $\mathcal{M}_M = 7 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$, $(\Theta_3 - \Theta_1)/\Theta_3 \approx 1/300$ (Abplattung der Erde). Wie viele Jahre dauert ein Umlauf der Erdachse?

Lösung:

Das gesamte Drehmoment $\vec{M} = \langle \vec{M}_S \rangle + \langle \vec{M}_M \rangle$ ist senkrecht zum Drehimpuls (wie in Aufgabe 3):

$$\vec{M} = M_0 \hat{e}_z \times \frac{\vec{L}}{L},$$

wobei $\vec{L} = L\hat{e}_3$ und

$$M_0 = -\frac{3G}{2}\left(\frac{\mathcal{M}_S}{d_S^3} + \frac{\mathcal{M}_M}{d_M^3}\right)(\Theta_3 - \Theta_1)\cos\theta_0.$$

Aufgabe 3 $\Rightarrow$ $\boxed{\omega = \frac{M_0}{L}}$

$$\omega = -\frac{3}{2} G (\Theta_3 - \Theta_1) \cos\theta_0 \left(\frac{\mathcal{M}_S}{d_S^3} + \frac{\mathcal{M}_M}{d_M^3}\right) \Big/ L$$

Das Minuszeichen hier bedeutet, dass die Präzessionsbewegung gegenläufig zur Drehung der Erde um sich selbst verläuft.

$$L = \Theta_3 \omega_0 \quad ; \quad \omega_0 = 2\pi/\mathrm{Tag}$$

$$\Rightarrow |\omega| = \frac{3}{2} G \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_3} \cos\theta_0 \left(\frac{\mathcal{M}_S}{d_S^3} + \frac{\mathcal{M}_M}{d_M^3}\right) \omega_0^{-1}$$

$$\simeq 7.9 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \simeq 25\,000 \text{ Jahre}$$