Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin

PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 12.

Besprechung: 12.07.2016

---

1. Zylinder (3+5+4=12 Punkte)

Betrachten Sie einen homogenen Kreiszylinder mit dem Radius a, der auf der Innenseite einer zylindrischen Oberfläche mit dem Radius R abrollt.

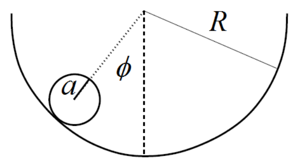


Abbildung 1.

(a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment Θ_3 des Zylinders durch seine Symmetrieachse.

Lösung:

Der Trägheitstensor ist durch

$$\Theta_{ik} = \int \rho(\vec{x})(\delta_{ik}\vec{x}^2 - x_i x_k) d^3x$$

gegeben. Wir legen das körperfeste Koordinatensystem auf die Symetrieachse (x_3 zeigt aus der Ebene heraus). Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Theta_3 &= \Theta_{33} = L\rho \int_{x_1^2+x_2^2<a^2} (x_1^2 + x_2^2) dx_1\, dx_2 \\
&= 2\pi L\rho \int_0^a r^3\, dr = 2\pi L\rho \frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Verwenden Sie den Winkel ϕ (s. Abb. 1) als verallgemeinerte Koordinate und stellen Sie die Lagrangefunktion dieses Systems auf.

Lösung: Die Lagrangefunktion ist durch

$$L = T - U$$

gegeben, wobei T die kinetische Energie und U die potentielle Energie bezeichnen. Die kinetische Energie kann generell in die Bewegung des Schwerpunktes (T_{SP}) und die Rotation um den Schwerpunkt (T_{rot}) aufgeteilt werden, d.h.

$$T = T_{\text{SP}} + T_{\text{rot}} = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\Theta_3\Omega^2,$$

wobei Ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Symmetrieachse des abrollenden Zylinders ist.

Zur Rotationsenergie: Wir benötigen eine Beziehung zwischen Ω und verallgemeinerter Koordinate. Dabei finden wir erst die Geschwindigkeit $V = |\dot{\vec{R}}|$ des Schwerpunktes als Funktion von ϕ und $\dot{\phi}$ und gewinnen damit die gewünschte Beziehung. Es gilt:

$$|\dot{\vec{R}}| = V = (R - a)\dot{\phi}$$

und damit gilt

$$\Omega = \frac{V}{a} = \frac{R-a}{a}\dot{\phi}\,.$$

Es folgt

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Theta_3\Omega^2 = \frac{1}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2\,.$$

Ausserdem hat man für die kinetische Energie des Schwerpunktes:

$$T_{\text{SP}} = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 = \frac{M}{2}(R-a)^2\dot{\phi}^2\,.$$

Die potentielle Energie ergibt sich zu

$$U = Mgz = -Mg(R-a)\cos\phi\,.$$

Damit lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\phi,\dot{\phi}) \quad = \quad \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi\,.$$

(c) Bestimmen Sie die Frequenz der Schwingung für kleine Auslenkungen ϕ.

Lösung:
Für kleine Winkel gilt:

$$\mathcal{L}(\phi,\dot{\phi}) \quad \simeq \quad \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\left(1-\frac{\phi^2}{2}\right)\,.$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\,\phi^2 \quad = \quad 0.$$

Es folgt:

$$\omega \quad = \quad \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}.$$

2. Halbzylinder (6+6+6=18 Punkte)

Ein starrer Halbzylinder (d.h. ein Zylinder halbiert entlang seiner Achse) mit konstanter Massendichte ρ, Länge L und Radius R führt im Schwerefeld eine Schaukelbewegung auf einer horizontalen Ebene aus (er rollt dabei auf der Ebene ohne zu rutschen, s. Abb. 2).

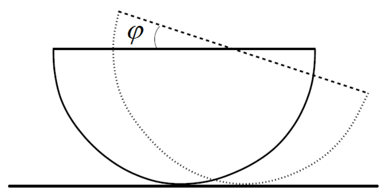


Abbildung 2.

(a) Wo liegt der Schwerpunkt des Halbzylinders? Bestimmen Sie das Trägheitsmoment entlang der Achse des Zylinders bezüglich eines Koordinatensystems dessen Ursprung im Schwerpunkt des Zylinders ist.

Lösung:
Wir berechnen den Schwerpunkt $\vec{R}_{\text{SP}}$ in der Ruhelage (Abb. a):

$$\vec{R}_{\text{SP}} = \frac{1}{M}\rho \int \vec{r} dV = \frac{2}{\pi R^2}\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^R r dr \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ y \\ -r\cos\theta \end{pmatrix} = -\frac{4R}{3\pi}\hat{e}_z$$

Wir setzen

$$a = \frac{4R}{3\pi}.$$

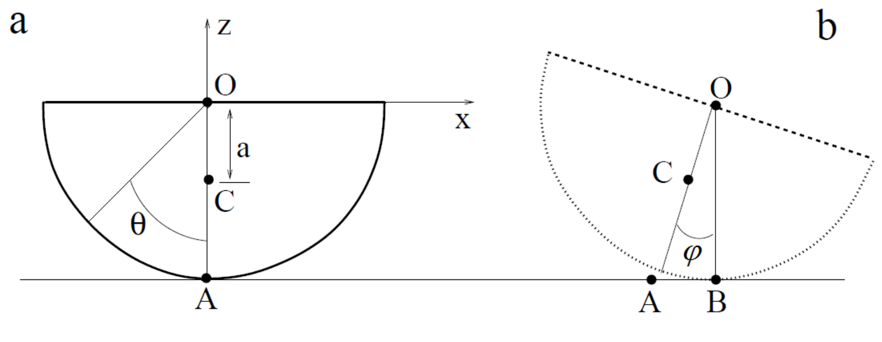
Das Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse, die durch den Punkt O geht ergibt sich aus

$$\Theta_O = \rho \int dV(x^2 + z^2) = \pi\rho L \int\limits_0^R r dr\, r^2 = \pi\rho L\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Der steinersche Satz besagt, dass das Trägheitsmoment bezüglich der Achse, die durch den Schwerpunkt parallel der y-Achse geht, durch

$$\Theta_C = \Theta_O - Ma^2 = M\left(\frac{R^2}{2} - a^2\right) = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)$$

gegeben ist.



(b) Benutzen Sie den Winkel φ als die verallgemeinerte Koordinate $(-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$ und geben Sie die Lagrangefunktion an.

Lösung:
Zunächst bestimmen wir die Schwerpunktenergie. Dazu brauchen wir die Änderungen der Position des Schwerpunkts. Der Abstand $|AB|$ (s. Abb. b) ergibt sich als $|AB| = R\varphi$. Dann gilt

$$x_C = |AB| - a\sin\varphi = R\varphi - a\sin\varphi$$

und

$$z_C = -a\cos\varphi.$$

Die Schwerpunktsenergie lautet

$$T_{\text{SP}} = \frac{M}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2) = \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2\left[(R - a\cos\varphi)^2 + (a\sin\varphi)^2\right] = \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi).$$

Die Rotationsenergie lautet

$$T_{\text{rot}} = \frac{\Theta_C}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2\left(\frac{R^2}{2} - a^2\right).$$

Die gesamte kinetische Energie ist dann durch

$$T = T_{\text{SP}} + T_{\text{rot}} = \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2\left(\frac{3}{2}R^2 - 2Ra\,\cos\varphi\right) = \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2 R^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right).$$

gegeben.
Alternativ kann man die Bewegung des rollenden Zylinders in jedem Zeitpunkt als reine Drehung um die momentane Drehachse (die mit Berührungslinie des Zylinders mit der ruhenden Ebene zusammenfällt) betrachten. Die kinetische Energie wird dann durch die Rotationsenergie T_{rot} bezüglich dem Punkt B (Abb. b) bestimmt:

$$T = \frac{1}{2}\Theta_B\dot{\varphi}^2.$$

Mithilfe des steinerschen Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned}\Theta_B &= \Theta_C + M|BC|^2 = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} + 1 + \frac{16}{9\pi^2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right)\\ &= MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right),\end{aligned}$$

wobei wir

$$|BC|^2 = |OB|^2 + |OC|^2 - 2|OB||OC|\cos\varphi = R^2\left[1 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right]$$

benutzt haben.
Die potenzielle Energie lautet

$$U = mgz_C = -Mga\cos\varphi = -\frac{4}{3\pi}MgR\cos\varphi.$$

Somit erhalten wir die Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right) + \frac{4}{3\pi}MgR\cos\varphi.$$

(c) Geben Sie die allgemeine Bewegungsgleichung und dann die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen an. Finden Sie die Frequenz der kleinen Schwingungen ($\varphi \ll 1$) des Halbzylinders um die Ruhelage ($\varphi = 0$).

Lösung:
Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\left[MR^2\dot{\varphi}\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right)\right] = \frac{4}{3\pi}MR^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi - \frac{4}{3\pi}MgR\sin\varphi.$$

Das ergibt

$$R^2\ddot{\varphi}\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\varphi\right) + \frac{8}{3\pi}R^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \frac{4}{3\pi}R^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi - \frac{4}{3\pi}gR\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} R \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos\varphi \right) + \dot{\varphi}^2 \frac{4}{3\pi} R \sin\varphi = -\frac{4}{3\pi} g \sin\varphi.$$

Für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$ können wir linearisieren

$$\ddot{\varphi} R \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \right) = -\frac{4}{3\pi} g\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{8g}{(9\pi - 16)R} \varphi = 0.$$

Die Frequenz der harmonischen Schwingungen ergibt sich als

$$\omega = \sqrt{\frac{8g}{R(9\pi - 16)}}.$$

3. Quader (10 Punkte)

Ein Quader mit konstanter Massendichte ρ und den Seitenlängen a, b, c sei im Schwerefeld an einer horizontalen Achse aufgehängt, die mit einer Seite der Länge a zusammenfällt (s. Abb. 3). Geben Sie die Lagrangefunktion des Quaders an. Bestimmen Sie die Frequenz der kleinen Schwingungen um die Ruhelage.

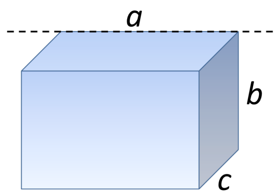


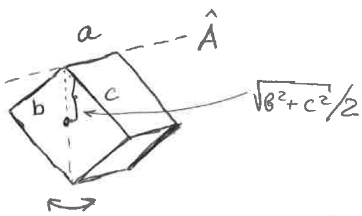
Abbildung 3.

Lösung:

$$\Theta_{xx} = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \, (y^2 + z^2) = a\rho \left(c\frac{b^3}{12} + b\frac{c^3}{12} \right)$$

$$= \underbrace{\rho abc}_{\substack{\shortparallel \\ M \text{ (Masse)}}} \frac{b^2 + c^2}{12} = M \frac{b^2 + c^2}{12}$$

$$\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = M \frac{a^2 + b^2}{12}$$



$$T = \frac{1}{2} \Theta_A \dot{\varphi}^2$$

$$\Theta_A = M \frac{b^2 + c^2}{4} + \Theta_{xx} = M \frac{b^2 + c^2}{3}$$

$$U = Mg \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2} (1 - \cos\varphi) \simeq \frac{Mg\sqrt{b^2 + c^2}}{4} \varphi^2$$

$$\Rightarrow \quad L \overset{\varphi \ll 1}{\simeq} \frac{M(b^2 + c^2)}{6} \dot{\varphi}^2 - \frac{Mg\sqrt{b^2 + c^2}}{4} \varphi^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{b^2 + c^2}}}$$

4. Bonusaufgabe (5 Bonuspunkte)

Lösen Sie Aufgabe 2 von Blatt 11 (symmetrischer Kreisel mit konstantem Drehmoment $\vec{M}$) für die Anfangsbedingung $\omega(0) = 0$ und einen beliebigen Winkel $\theta(0) = \theta_0$ zwischen der Figurenachse des Kreisels und $\vec{M}$.

Lösung:

Aufgabe 2 von Blatt 11:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi &= \frac{M_0}{\Theta_1} t \sin\theta \sin\psi, && (1) \\
\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi &= \frac{M_0}{\Theta_1} t \sin\theta \cos\psi, && (2) \\
\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} &= \frac{M_0}{\Theta_3} t \cos\theta && (3)
\end{aligned}$$

und Gl. (1)$\times \cos\psi -$ Gl. (2)$\times \sin\psi$:

$$\dot{\theta} = 0.$$

Anfangsbedingung: $\theta(0) = \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0$ und

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{M_0}{\Theta_1} t, && (4) \\
\dot{\varphi} \cos\theta_0 + \dot{\psi} &= \frac{M_0}{\Theta_1} t \cos\theta_0 + \dot{\psi} = \frac{M_0}{\Theta_3} t \cos\theta_0 \quad \Rightarrow && (5) \\
\varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{M_0}{2\Theta_1} t^2, && (6) \\
\psi(t) &= \psi_0 + \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)\, M_0 \cos\theta_0}{2\Theta_1\Theta_3} t^2. && (7)
\end{aligned}$$

Mit $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{M_0 t \sin\theta_0}{\Theta_1} \sin\left[\frac{(\Theta_1 - \Theta_3) M_0 \cos\theta_0}{2\Theta_1\Theta_3} t^2\right], \\
\omega_2 &= \frac{M_0 t \sin\theta_0}{\Theta_1} \cos\left[\frac{(\Theta_1 - \Theta_3) M_0 \cos\theta_0}{2\Theta_1\Theta_3} t^2\right], \\
\omega_3 &= \frac{M_0 t \cos\theta_0}{\Theta_3}.
\end{aligned}$$