Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 2
Besprechung: 03.05.2016

1. Lagrange-Gleichungen erster Art: Doppel-Pendel (5 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 1 dargestellte Doppel-Pendel. Die Massen der Massenpunkte sind m_1 und m_2 und die Längen der Seile sind l_1 und l_2. Beide Massenpunkte bewegen sich in 3 Dimensionen. Die Gravitationskraft wirkt parallel zur z-Achse. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art für dieses Doppel-Pendel in kartesischen Koordinaten auf.

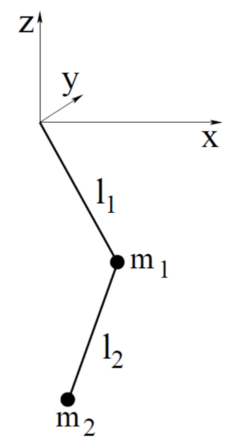


Abbildung 1: Das Doppel-Pendel.

Lösung:

Wir beschreiben die Massenpunkte durch die Koordinaten $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ und $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. Erst formulieren wir die Zwangsbedingungen $A_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$.

$$A_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1|^2 - l_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$A_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 - l_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_2^2 = 0$$

Auf beide Massen wirkt die Schwerkraft. Die Lagrange-Gleichungen erster Art lauten

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -m_1 g \vec{e}_z + \lambda_1 \nabla_{\vec{r}_1} A_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \lambda_2 \nabla_{\vec{r}_1} A_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -m_2 g \vec{e}_z + \lambda_1 \nabla_{\vec{r}_2} A_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \lambda_2 \nabla_{\vec{r}_2} A_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 (x_1 - x_2) \\ m_1 \ddot{y}_1 &= 2\lambda_1 y_1 + 2\lambda_2 (y_1 - y_2) \\ m_1 \ddot{z}_1 &= -m_1 g + 2\lambda_1 z_1 + 2\lambda_2 (z_1 - z_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -2\lambda_2 (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -2\lambda_2 (y_1 - y_2) \\ m_2 \ddot{z}_2 &= -m_2 g - 2\lambda_2 (z_1 - z_2) \end{aligned}$$

2. Lagrange-Gleichungen erster Art: Pendel mit veränderlicher Fadenlänge

(2+8+2+3+5=20 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 2 dargestellte mathematische Pendel der Masse m in der x-z Ebene mit variabler Fadenlänge $l(t)$.

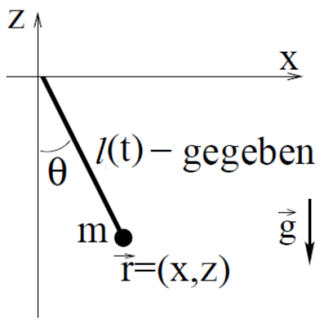


Abbildung 2: Pendel mit veränderlicher Fadenlänge $l(t)$.

Lösung:

(a) Benutzen Sie (x, z) als Koordinaten des Pendels und stellen Sie die Zwangsbedingung auf.

Zwangsbedingung

$$A(x,z,t) \equiv x^2+z^2-\ell^2(t) = 0$$

(b) Bestimmen Sie die Zwangskraft und die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1. Art).

Zwangskraft

$$\vec r \equiv (x,z)$$

$$\vec Z = \lambda(t)\cdot\vec\nabla A(\vec r,t) = \lambda(t)\cdot 2\left(x\hat e_x + z\hat e_z\right)$$

Bewegungsgleichung

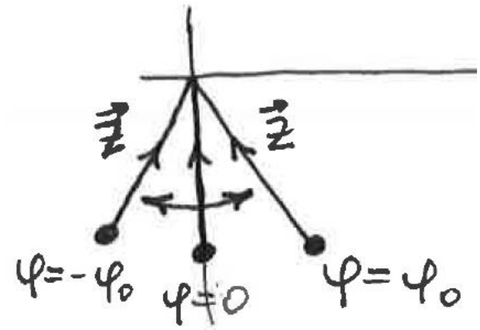
$$m\ddot{\vec r} = \vec F_g + \vec Z \Rightarrow \begin{cases} m\ddot x = 2\lambda(t)x \\ m\ddot z = -mg + 2\lambda(t)z \\ x^2+z^2-\ell^2(t)=0 \end{cases}$$

(c) Wie lautet die Energieänderung dE/dt, die durch die zeitabhängige Zwangsbedingung verursacht wird?

Energieänderung

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda(t)\frac{\partial}{\partial t}A(\vec r,t) = +\lambda(t)\frac{d}{dt}\ell^2(t)$$

(d) Wie ändert sich die Zwangskraft mit der Position des Pendels, wenn die Fadenlänge l konstant (zeitunabhängig) ist?



Zylinder-Koordinaten: $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r, \quad \vec{r} = r\vec{e}_r,$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \underbrace{=}_{r=l=\text{const}} l\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

$\ell(t) = \text{const} = \ell \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = -l\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + l\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$

Die Projektion der Bevegungsgleichung auf $\vec{e}_r$ ergibt:

$$-ml\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - Z, \qquad \dot{\varphi}^2 = v^2/l^2$$

$$Z - mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{\ell}$$

$$Z = mg\cos\varphi + \frac{mv^2(\varphi)}{\ell}$$

$\Rightarrow$ Z ist maximal im unteren Punkt $\varphi = 0$ und minimal in den oberen Punkten $\varphi = \pm\varphi_0$

Quantitativ: $\frac{mv^2}{2} - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0$ (Energie-Erhaltung)

$\Rightarrow \quad v^2(\varphi) = 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$

$\Rightarrow \quad Z = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{\ell} = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$

$\vec{Z}$ zeigt zum Aufhängepunkt

(e) Welche Konsequenzen ergeben sich aus (c) und (d) für ein Kind, das in einer Schaukel möglichst schnell nach oben kommen möchte?

$$\frac{dE}{dt} = +\lambda(t)\frac{d}{dt}\ell^2(t) \qquad Z = -2\lambda(t)\ell$$

$$-\lambda(t) \text{ ist } \begin{cases} \text{maximal für } \varphi = 0 \\ \text{minimal für } \varphi = \pm\varphi_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\frac{dE}{dt} > 0$ zu bekommen, muß man $\ell(t)$ unten verkürzen und oben vergrößern

$\Rightarrow$ das Kind muß im unteren Punkt die Beine hochnehmen und im oberen senken (oder unten aufstehen und oben sich hinsetzen)

3. Lagrange-Gleichungen erster Art: Gleitender Massenpunkt

(3+8+4=15 Punkte)

Betrachten Sie einen Massenpunkt (Masse m), der reibungslos auf einer Kugel vom Radius R gleitet (Abb. 3). Benutzen Sie ein Koordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt der Kugel, und nehmen Sie an, dass der Massenpunkt in der x-z Ebene hinabgleitet. Die Position des Massenpunkts werde durch den Vektor $\vec{r}(t)$ gegeben, $\theta(t)$ sei dessen Winkel zur $\vec{e}_z$-Richtung. Die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes sei null, und der Anfangswinkel θ_0 sei klein, aber ungleich Null.

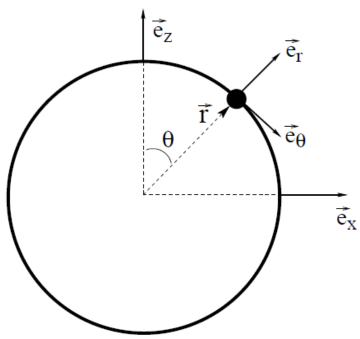


Abbildung 3: Massenpunkt auf einer Kugel.

Lösung:

(a) Finden Sie die Zwangsbedingung, die gilt, solange der Massenpunkt auf der Kugel gleitet.

Die Zwangsbedingung lautet $A(\vec{r}) = \sqrt{x^2+z^2} - R = 0$. Da die Zwangskraft senkrecht zu der Oberfläche $A(\vec{r}) = 0$ sein muss, sehen wir dass $\vec{Z} = \lambda \vec{e}_r$.

(b) Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art in Kugel-Koordinaten um.

Die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen erster Art) in kartesischen Koordinaten sind:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + \lambda\vec{e}_r \,,$$
$$r = R\,.$$

Wir wollen $\ddot{\vec{r}}$ in Kugel-Koordinaten (mit $\phi = 0$) ausdrücken. Dann gilt $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r$, und $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_z = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Dies ergibt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Die zweite Ableitung ergibt

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Nun können wir die Bewegungsgleichung auf $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\theta$ projezieren.

Die Projektion auf $\vec{e}_r$ ergibt

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mg\cos\theta + \lambda$$

Die Projektion auf $\vec{e}_\theta$ ergibt

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = mg\sin\theta$$

Zusätzlich gilt die Zwangsbedingung $r = R$ und daher $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Dies ergibt

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + \lambda\,, \qquad (*)$$
$$mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta\,. \qquad (**)$$

Wir multiplizieren Gl. (**) mit $\dot{\theta}$ und integrieren. Das ergibt

$$(1/2)mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + c_0$$

Die Konstante c_0 wird durch die Anfangsbedingungen gefunden. Da am Anfang $\dot{\theta} = 0$, haben wir $c_0 = mg\cos\theta_0$. Einsetzen in Gl. (*) liefert

$$mR\dot{\theta}^2 = -2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) = mg\cos\theta - \lambda$$

und schließlich

$$3\cos\theta = 2\cos\theta_0 + \frac{\lambda}{mg}$$

Das ergibt θ als Funktion von θ_0 und λ. Beachten Sie, dass die Zwangskraft λ eine zeitabhängige Grösse ist.

(c) Finden Sie mittels der Lagrange-Gleichungen den Winkel θ_c, bei dem der Massenpunkt die Kugel verlässt.

Ab dem Zeitpunkt, zu dem der Massenpunkt die Kugel verlässt, bewegt sich der Massenpunkt frei. Deshalb wirkt auf den Massenpunkt keine Zwangskraft mehr. Das bedeutet, dass dieser Zeitpunkt durch $\lambda = 0$ bestimmt wird. Dann finden wir

$$3\cos\theta_c = 2\cos\theta_0$$

Da θ_0 klein ist, gilt $\cos\theta_0 \approx 1$ und $\cos\theta_c \approx 2/3$. Oder genauer: $\cos\theta_0 \approx 1 - \theta_0^2/2$ und $\cos\theta_c \approx 2/3 - \theta_0^2/3$.