Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 5
Besprechung: 24.05.2016

1. Variationsrechnung mit Nebenbedingung (3+2+4+8+5+8=30 Punkte)

Ein Seil der Länge L werde an zwei Punkten $(-d, 0)$ und $(d, 0)$ (d.h. in gleicher Höhe und mit Abstand $2d$, s. Abb. 1) im Schwerefeld aufgehängt. Für die Länge des Seiles gelte $L > 2d$. Nehmen Sie eine konstante Massendichte ρ an.
Gesucht wird die Kurve, die die Gleichgewichtslage des Seils beschreibt. Das Seil stellt sich so ein, dass seine potentielle Energie minimal wird.

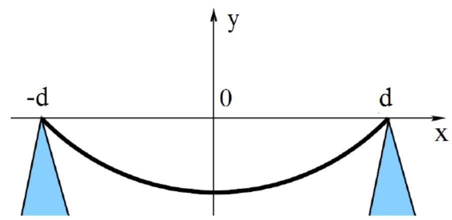

Abbildung 1: Das hängende Seil.

(a) Wir beschreiben die Lage des Seils durch eine Funktion $y(x)$. Geben Sie die potentielle Energie des Seils und seine Länge als Funktional von $y(x)$ an und formulieren Sie das Variationsproblem mit Nebenbedingung.

Potentielle Energie

$$U[y] = \int dm\, g y = \int \rho\, ds\, g y = \rho g \int dx \sqrt{1+y'^2}\, y$$

$\rho = \frac{M}{L}$ – Massendichte ; $ds = dx\sqrt{1+y'^2}$ – Bogenlängeelement

Länge $T[y] = \int ds = \int dx \sqrt{1+y'^2}$

Variationsproblem mit Nebenbedingung:

$$S[y] \equiv \int dx \sqrt{1+y'^2}\, y = \min$$

$$T[y] \equiv \int dx \sqrt{1+y'^2} = L$$

(b) Benutzen Sie die Methode der Lagrangemultiplikatoren und bilden Sie das Funktional

$$\mathcal{K}[y(x)] = \int_{-d}^{d} dx\, K(y(x), y'(x)) \ ,$$

für das ein Minimum gesucht werden muss.

$$\mathcal{K}[y] = \int dx \left(y\sqrt{1+y'^2} - \lambda \sqrt{1+y'^2} \right) \equiv S - \lambda T$$

λ ← Lagrange-Multiplikator

$$K(y, y') = \sqrt{1+y'^2}\,(y-\lambda)$$

(c) Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Extremum dieses Funktionals an.

$$\mathcal{K}[y] = \min \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial K}{\partial y'} = \frac{\partial K}{\partial y}$$

$$\frac{\partial K}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(y-\lambda)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial K}{\partial y'} = \left[\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right](y-\lambda) + \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[y''(y-\lambda)\frac{1}{1+y'^2} + y'^2\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{y''(y-\lambda)}{1+y'^2} + \cancel{y'^2} = 1 + \cancel{y'^2}$$

$$\boxed{y''(y-\lambda) - (1+y'^2) = 0}$$

(d) Verwenden Sie die Konstanz der Größe

$$I = K - y'\frac{\partial K}{\partial y'}.$$

Aus welcher Eigenschaft des Funktionals $\mathcal{K}$ folgt $I = \text{const}$? Sie erhalten damit eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form $y' = F(y)$, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Wie viele Konstanten enthält die gefundene Lösung $y(x)$? Durch welche Bedingungen werden sie festgelegt?

K hängt nicht explizit von x ab

$$\Rightarrow -I \equiv y'\frac{\partial K}{\partial y'} - K = \text{const} \qquad \left(\text{d.h. } \frac{dI}{dx} = 0\right)$$

$$-I = y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(y-\lambda) - \sqrt{1+y'^2}(y-\lambda) = -\frac{y-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \sqrt{\left(\frac{y-\lambda}{I}\right)^2 - 1}} = F(y)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y-\lambda}{I}\right)^2 - 1}}$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y-\lambda}{I}\right)^2 - 1}} = I \,\text{Arch}\, \frac{y-\lambda}{I} + c$$

$$\boxed{y(x) = \lambda + I \,\text{ch}\, \frac{x-c}{I}}$$

ch $\equiv$ cosh
sh $\equiv$ sinh

3 Konstanten λ, I, c werden durch die folgenden Bedingungen festgelegt: $y(-d) = 0$, $y(d) = 0$, $\int dx \sqrt{1+y'^2} = L$

$$\left.\begin{matrix} y(-d) = 0 \\ y(d) = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow c = 0, \quad \lambda = -I\,\text{ch}(d/I)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = I\left(\text{ch}\frac{x}{I} - \text{ch}\frac{d}{I}\right)}$$

$y' = \operatorname{sh} x/I$

$$\int dx \sqrt{1+y'^2} = \int_{-d}^{d} dx \operatorname{ch} x/I = 2I \operatorname{sh} d/I$$

$$\boxed{2I \operatorname{sh} \frac{d}{I} = L}$$ — Gleichung für I

(e) Betrachten Sie die Kräfte die auf ein kleines Teil des Seils wirken. Was muss für die vektorielle Summe dieser Kräfte gelten? Leiten Sie daraus noch einmal die obige Differenzialgleichung $y' = F(y)$ her.

Wir betrachten ein kleines Teil des Seils (s. Abbildung). Da das Teil sich nicht bewegt, ist die Summe aller Kräfte null. Die Spannungskraft $\vec{f}(x)$ ist entlang des Seils gerichtet. Die Projektionen auf $\vec{e}_x$ und auf $\vec{e}_y$ ergeben

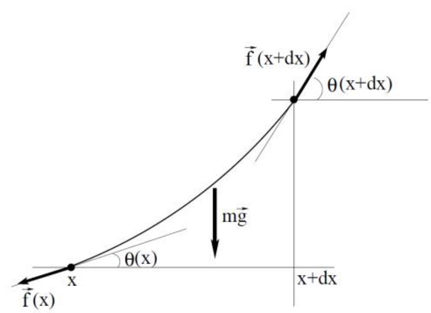

Abbildung: Ein kleines Teil des Seiles.

$$\begin{aligned} f(x)\cos[\theta(x)] &= f(x+dx)\cos[\theta(x+dx)], && (*) \\ f(x+dx)\sin[\theta(x+dx)] &- f(x)\sin[\theta(x)] = \rho g dl = \frac{\rho g dx}{\cos[\theta(x)]}, && (**) \end{aligned}$$

wobei ρdl die Masse des Teils und dl die Länge des Teils sind. Von Gl. (*) folgt, dass

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\cos[\theta(x)]\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos[\theta(x)]\frac{df(x)}{dx} = \sin[\theta(x)]f(x)\frac{d\theta(x)}{dx}$$

und $f(x)\cos[\theta(x)] = f_0$ wobei f_0 eine Konstante ist. Dann setzen wir diese beziehungen in Gl. (**) ein. Das ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\{f(x)\sin[\theta(x)]\} &= \sin[\theta(x)]\frac{df(x)}{dx} + \cos[\theta(x)]f(x)\frac{d\theta(x)}{dx} \\ &= \frac{\sin^2[\theta(x)]}{\cos[\theta(x)]}f(x)\frac{d\theta(x)}{dx} + f_0\frac{d\theta(x)}{dx} \\ &= \left\{\tan^2[\theta(x)] + 1\right\} f_0\frac{d\theta(x)}{dx} \\ &= f_0\frac{d}{dx}\tan[\theta(x)] = \frac{\rho g}{\cos[\theta(x)]}, \qquad (***) \end{aligned}$$

Wir führen nun $t(x) = \tan\theta$ ein. Dann gilt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\rho g}{f_0}\sqrt{1+t^2} \;\Rightarrow\; \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\rho g}{f_0}x + \mathrm{const} \;\Rightarrow\; t(x) = \sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}x + c_0\right),$$

wobei c_0 eine Konstante ist. Wir beobachten, dass $\tan\theta = dy/dx = y'$. Integration ergibt

$$y(x) = \frac{f_0}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}x + c_0\right) + y_0$$

wobei y_0 eine weitere Konstante ist. Es folgt

$$\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}x + c_0\right) = \frac{\rho g}{f_0}(y - y_0) \;\Rightarrow\; \sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}x + c_0\right) = \sqrt{\left[\frac{\rho g(y-y_0)}{f_0}\right]^2 - 1}.$$

Somit erhalten wir

$$y' = t(x) = \sqrt{\left[\frac{\rho g}{f_0}(y-y_0)\right]^2 - 1} = F(y)$$

von Aufgabe 1d, mit

$$\lambda = y_0 \quad \text{und} \quad I = \frac{f_0}{\rho g}.$$

(f) Betrachten Sie nun die Situation, dass ein Massenpunkt mit Masse M_0 stationär an das Seil befestigt wird. Die Länge des Seilstückes vom Punkt $(-d, 0)$ zur Position der Masse sei l_0. Finden Sie die Kurve $y(x)$, die die Gleichgewichtslage des Seils beschreibt.

Wir gehen davon aus, dass die Position des befestigten Massenpunktes (X_0, Y_0) (mit unbekannter Koordinate X_0) ist. Wir betrachten nun das Teil des Seils um den Massenpunkt, $X_0 - \delta \le x \le X_0 + \delta$, mit $\delta \to 0$. Die Projektionen der Spannungskraft auf $\vec{e}_x$ und auf $\vec{e}_y$ ergeben

$$\begin{aligned}
f(X_0+\delta)\cos[\theta(X_0+\delta)] &= f(X_0-\delta)\cos[\theta(X_0-\delta)], \\
f(X_0+\delta)\sin[\theta(X_0+\delta)] &- f(X_0-\delta)\sin[\theta(X_0-\delta)] = \frac{\rho g \delta}{\cos[\theta(X_0)]} + M_0 g \to M_0 g.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen $f_R = f(X_0+\delta)$, $f_L = f(X_0-\delta)$, $\theta_R = \theta(X_0+\delta)$, $\theta_L = \theta(X_0-\delta)$ und schreiben

$$f_R\cos\theta_R = f_L\cos\theta_L = f_0, \qquad f_R\sin\theta_R - f_L\sin\theta_L = M_0 g.$$

mit einer unbekannten Konstante f_0. Es folgt:

$$\tan\theta_R - \tan\theta_L = \frac{M_0 g}{f_0}. \qquad (\bigstar)$$

Wir bezeichnen

$$t(-d<x<X_0)=t_L(x),\quad y(-d<x<X_0)=y_L(x),$$

$$t(X_0<x<d)=t_R(x),\quad y(X_0<x<d)=y_R(x).$$

Die Funktionen $t_L(x)$, $t_R(x)$, $y_L(x)$, $y_R(x)$ erfüllen die Gleichungen aus Aufgabe 1e mit unbekannten Konstanten c_L, c_R, y_L und y_R:

$$t_L(x)=\sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}x+c_L\right),\quad t_R(x)=\sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}x+c_R\right),$$
$$y_L(x)=\frac{f_0}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}x+c_L\right)+y_L,\quad y_R(x)=\frac{f_0}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}x+c_R\right)+y_R.$$

Die Konstanten y_R und y_L werden durch die Randbedingungen bestimmt:

$$y_L(-d)=0\ \Rightarrow\ y_L=-\frac{f_0}{\rho g}\cosh\left(-\frac{\rho g}{f_0}d+c_L\right),$$
$$y_R(d)=0\ \Rightarrow\ y_R=-\frac{f_0}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}d+c_R\right).$$

Deshalb haben wir vier unbekannten Variablen (X_0, f_0, c_L und c_R) sowie vier Nebenbedingungen:

(1) : Gl. (★) $\Rightarrow\ t_R(X_0)-t_L(X_0)=\dfrac{M_0 g}{f_0}\quad\Rightarrow$

$$\sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}X_0+c_R\right)-\sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}X_0+c_L\right)=\frac{M_0 g}{f_0},$$

(2) : $y_L(X_0)=y_R(X_0)\quad\Rightarrow$

$$\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}X_0+c_L\right)-\cosh\left(-\frac{\rho g}{f_0}d+c_L\right)=\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}X_0+c_R\right)-\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}d+c_R\right),$$

(3) : $l_0=\displaystyle\int_{-d}^{X_0}dx\sqrt{1+t_L^2(x)}=\int_{-d}^{X_0}dx\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}x+c_L\right)\quad\Rightarrow$

$$\frac{\rho g}{f_0}l_0=\sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}X_0+c_L\right)-\sinh\left(-\frac{\rho g}{f_0}d+c_L\right),$$

(4) : $L-l_0=\displaystyle\int_{X_0}^{d}dx\sqrt{1+t_R^2(x)}=\int_{X_0}^{d}dx\cosh\left(\frac{\rho g}{f_0}x+c_R\right)\quad\Rightarrow$

$$\frac{\rho g}{f_0}(L-l_0)=\sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}d+c_R\right)-\sinh\left(\frac{\rho g}{f_0}X_0+c_R\right).$$

2. Bewegungsgleichung mit zeitabhängigen Masse (10 Punkte)

Welche Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m(t)}{2}\dot{x}^2 - \frac{m(t)}{2}\omega_0^2 x^2$$

mit der zeitabhängigen Masse $m(t) = m_0 e^{2\lambda t}$? Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Diskutieren Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für die Fälle: (a) $|\lambda| < \omega_0$, (b) $|\lambda| = \omega_0$ und (c) $|\lambda| > \omega_0$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(t)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(t)\ddot{x} + \frac{dm}{dt}\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m(t)\omega_0^2 x$$

$\rightarrow$ Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$

$$m(t)\ddot{x} + \frac{dm}{dt}\dot{x} + m(t)\omega_0^2 x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

($\Leftrightarrow$ gedämpfter harmonischer Oszillator)

Ansatz: $x = c e^{\gamma t}$ $\rightarrow$ $\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$

$$\rightarrow \gamma_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}$$

a) $|\lambda| < \omega_0 \implies$ 2 komplexe Lösungen

$$\gamma_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$x(t) = \left(\tilde{c}_1 \cos\omega t + \tilde{c}_2 \sin\omega t\right) e^{-\lambda t} \quad , \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right| \rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t \, e^{-\lambda t}}$$

$\lambda > 0 \quad \rightarrow$ gedämpfte Schwingung

$\lambda < 0 \quad \rightarrow$ Schwingung mit exponentiell steigender Amplitude

b) $|\lambda| = \omega_0 \qquad \gamma_{1,2} = -\lambda$

$$\rightarrow \qquad x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right| \rightarrow \boxed{x(t) = v_0 t \, e^{-\lambda t}}$$

c) $|\lambda| > \omega_0 \rightarrow \gamma_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ reell

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \left[e^{\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \right]}$$

aperiodische Bewegung, keine Schwingung