

Mechanik B

Mechanik A: Newtonsche Mechanik, Isaac Newton
1642 - 1726

Mechanik B: * Lagrangeformalismus, Euler-Lagrange-Gleichungen

* Variationsprinzipien

* Symmetrien und Erhaltungssätze

* Hamiltonformalismus

* Anwendungen und Verallgemeinerungen:

- Schwingungen

- Starrer Körper

- Beschleunigte und rotierende

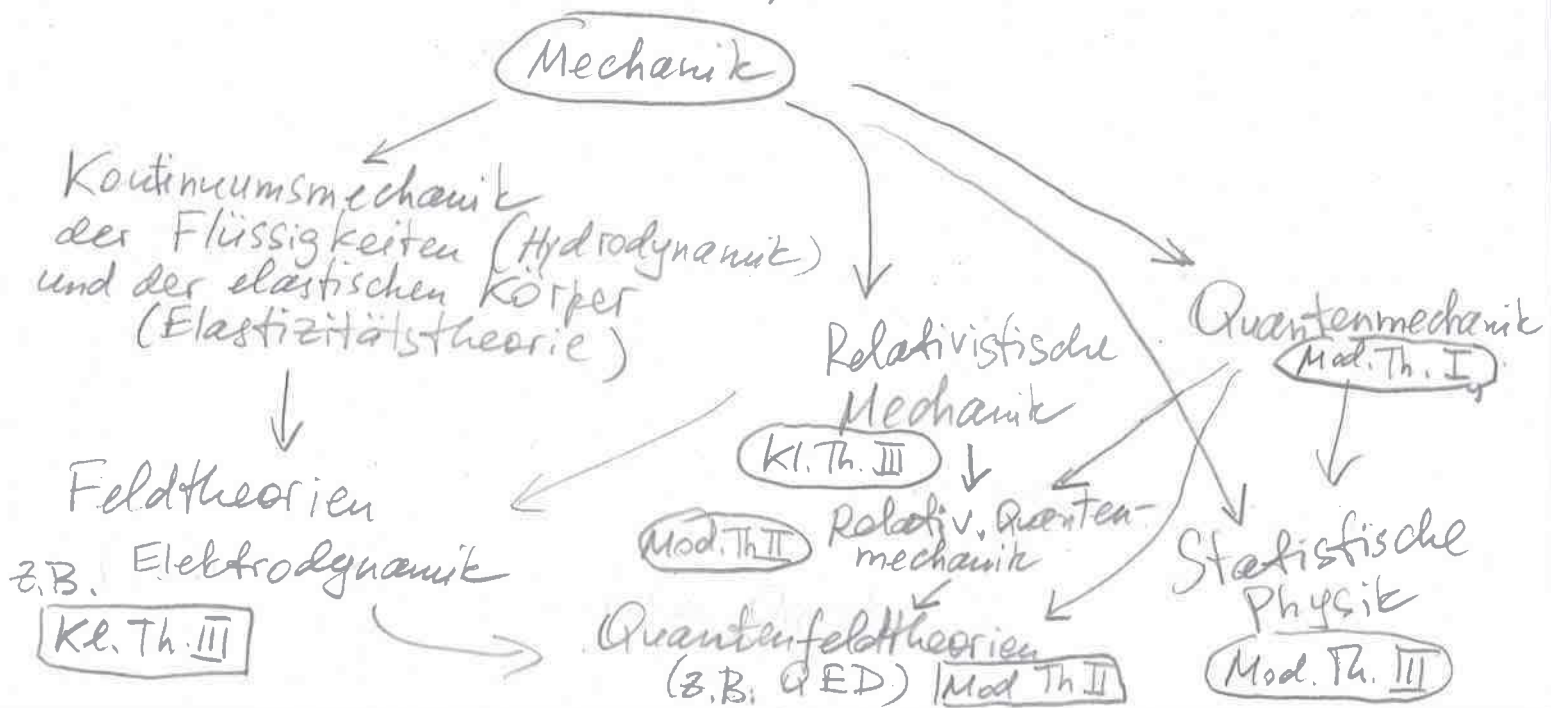
Bezugssysteme

Joseph - Louis Lagrange,
1736 - 1813

Leonhard Euler, 1707 - 1783

William Rowan Hamilton, 1805 - 1865

Im 18. und 19. Jahrhundert hat sich Mechanik zu dem Prototyp einer physikalischen Theorie entwickelt. Die Begriffe und Methoden der Mechanik dienten als Vorbild für andere Gebiete der theor. Physik



Kapitel 1. Lagrangeformalismus.

1.1. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte:

Lagrange - Gleichungen 1. Art

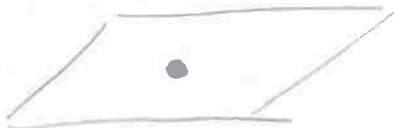
Wir betrachten Systeme, die aus N Massenpunkten mit Massen m_i ($i=1 \dots N$) bestehen.

Falls sich diese in 3 Raumdimensionen frei bewegen können
 $\rightarrow 3N$ Freiheitsgrade

Wir betrachten aber Systeme, die Zwangsbedingungen unterworfen sind, die die Bewegung einschränken.

Beispiele:

- i) Abstände konstant
- ii) ein Massenpunkt ist an eine Fläche gebunden



usw

Holonome Zwangsbedingungen: $A_\mu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$

$$\mu = 1, \dots, N_z$$

sonst nichtholonom (z.B. in der Form einer Ungleichung)

Wir werden nur holonome z.B. betrachten

$\swarrow$ skleronom, falls $\partial A_\mu / \partial t = 0$
 $\searrow$ rheonom, falls $\partial A_\mu / \partial t \neq 0$

Anzahl der Freiheitsgrade:

$$f = 3N - N_z \quad \text{falls } N_z \text{ Gleichungen } A_\mu = 0 \text{ unabhängig sind}$$

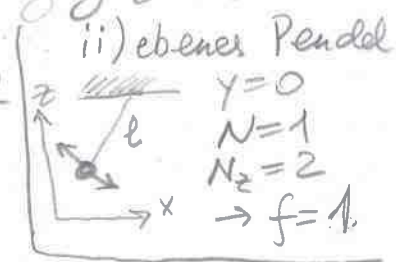
Beispiele:

i) Pendel



$$N=1, N_z=1 \rightarrow f=2$$

$$\rightarrow f=2$$

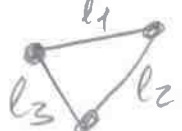


iii)



$$N=2, N_z=1 \rightarrow f=5$$

iv)

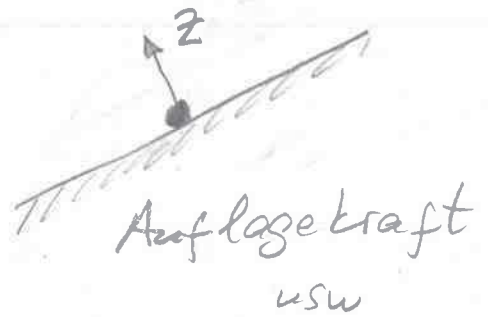


$$N=3, N_z=3 \rightarrow f=6$$

(gilt allgemein für einen starren Körper)

Zwangsbedingungen $\rightarrow$ Zwangskräfte $\vec{Z}_i$,
die die Bewegung von Massenpunkten i
beeinflussen

z.B.:



Newtonsche Bewegungsgleichungen

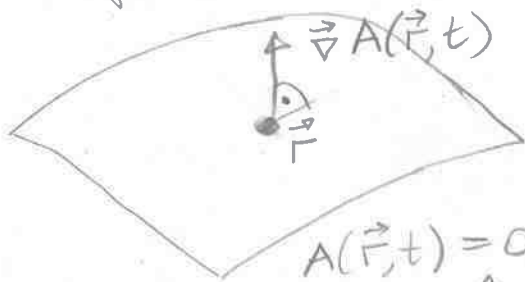
$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$\vec{F}_i$ - bekannte Kräfte

Die Zwangskräfte hängen im allgemeinen selbst von der Bewegung ab und sind Funktionen von $\{\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\}$.

Richtung der Zwangskraft:

Einfachster Fall: 1 Massenpunkt, 1 Zwangsbedingung
 $A(\vec{r}, t) = 0$



$A(\vec{r}, t) = 0$
(bei gegebenem Zeitpunkt t)

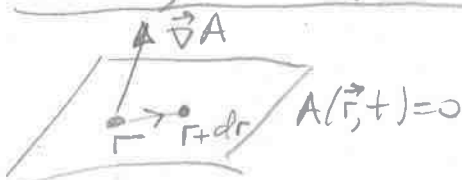
Die Zwangsbedingung beeinflusst die Bewegung innerhalb der Fläche $A(\vec{r}, t) = 0$ nicht

$\Rightarrow \vec{Z}$ hat keine Komponente tangential zur Fläche

$\Leftrightarrow \vec{Z}$ ist senkrecht zur Fläche gerichtet

$$\Leftrightarrow \vec{Z} = \lambda(t) \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t)$$

Beweis, dass $\vec{\nabla} A \perp$ Fläche ist (d.h., $\parallel$ zur Normale):



$$A(\vec{r}, t) = 0$$

$$A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = 0$$

$d\vec{r}$ - beliebiger
infinitesimaler Vektor
 $\parallel$ zur Tangentialfläche
im Punkt $\vec{r}$

$$A(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} + O((d\vec{r})^2)$$

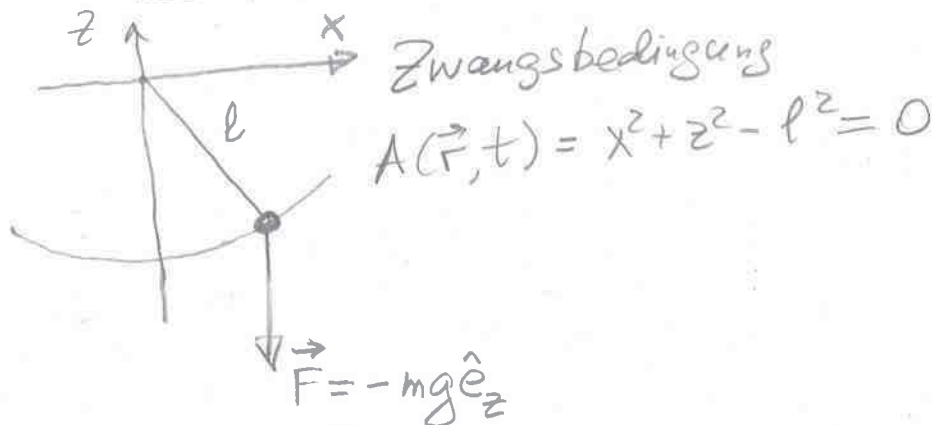
$$\Rightarrow \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0$$

QED

→ Gleichungssystem, die die Bewegung des Massenpunktes beschreibt:

$$\begin{cases} m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) \\ A(\vec{r}, t) = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 3+1=4 \text{ Gleichungen} \\ \text{für } 3+1=4 \text{ unbekannte} \\ \text{Funktionen } \vec{r}(t), \lambda(t) \end{array} \right.$$

Beispiel: das Pendel in (x, z) -Ebene



$y=0$ trivial
 (keine äußere Kräfte in y -Richtung)

$$\vec{\nabla} A = 2(x, 0, z)$$

Bewegungsgleichungen:
 (für $x(t), z(t), \lambda(t)$)

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 2\lambda x \\ m \ddot{z} = -mg + 2\lambda z \\ x^2 + z^2 - l^2 = 0 \end{cases}$$

Allgemeiner Fall: ($3N$ Bewegungsgleichungen und N_z Zwangsbedingungen)

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i + \sum_{\mu=1}^{N_z} \lambda_{\mu} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad i=1 \dots N \\ A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0 \quad \mu=1 \dots N_z \end{aligned}$$

Lagrangegleichungen 1. Art

$3N + N_z$ Gleichungen für $3N + N_z$ unbekannte Funktionen $\vec{r}_i(t), \lambda_{\mu}(t)$

Bemerkung $\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_{\mu} \equiv \vec{\nabla}_i A_{\mu} \equiv \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_i}, \frac{\partial A_{\mu}}{\partial y_i}, \frac{\partial A_{\mu}}{\partial z_i} \right)$

Energiebilanz unter Voraussetzung

konserver Kräfte: $\vec{F}_i = - \vec{\nabla}_i U(\{\vec{r}_i\})$

Wir multiplizieren die Bew.-Gl für das i -te Teilchen mit $\dot{\vec{r}}_i$, summieren über i und benutzen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$

$$\dot{\vec{r}}_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i^2 \quad ; \quad \sum_i (-\dot{\vec{r}}_i \vec{F}_i) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U = \frac{dU}{dt}$$

$$A_\mu(\{\vec{r}_i\}, t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} A_\mu = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu + \frac{\partial}{\partial t} A_\mu = 0$$

Damit ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{\mu=1}^{N_z} \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial t} A_\mu(\{\vec{r}_i\}, t)$$

Wobei $E = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\{\vec{r}_i\})$ - die Energie des Systems

$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0 \rightarrow$ Energie des Systems erhalten

$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} \neq 0$ (z.B. Pendel mit einer zeitabhängigen Fadenlänge $\rightarrow$ Energie von außen zu- oder abgeführt)

Lösung eines Systems von Lagrangegleichungen 1. Art (ausführlich in Fließbach, Kap. 8, sowie in Übungen)

- * $\frac{d}{dt^2} A_\mu(\{\vec{r}_i\}, t) = 0$
- * Einsetzen hier von $\ddot{\vec{r}}_i$ aus der Bew.-Gl. $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu$
- * Lösen nach $\{\lambda_\mu\}$ (Z_N Gleichungen für Z_N Funktionen λ_μ)
 $\rightarrow \lambda_\mu(\{\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\}, t)$
- * Einsetzen von erzielten λ_μ in die Bew.-Gl.
- * Lösen nach $\vec{r}_i(t)$. Die Integrationskonstanten werden durch die Anfangsbedingungen für $\{\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\}$ festgelegt.
- * Einsetzen von $\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)$ in $\vec{Z}_i = \sum_\mu \lambda_\mu(\{\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\}, t) \nabla_i A_\mu(\{\vec{r}_i\}, t) \rightarrow$ Bestimmung der Zwangskräfte

1.2. Lagrange Gleichungen 2. Art

1.2.1. Verallgemeinerte Koordinaten

Üblicherweise ist man an der Berechnung der Zwangskräfte nicht interessiert. Dann ist es geschickt eine Formulierung zu wählen, bei der die Zwangskräfte gar nicht auftauchen. Diese Idee wird durch die Verwendung von verallgemeinerten Koordinaten ermöglicht, die so gewählt sind, dass sie genau den durch die holonomen Zwangsbedingungen definierten Unterraum parametrisieren

N Massenpunkten $\rightarrow 3N$ Koordinaten $\vec{r}_i, i=1 \dots N$
 N_z Zwangsbedingungen $\rightarrow$

$$\rightarrow f = 3N - N_z \text{ Freiheitsgrade}$$

Verallgemeinerte ($\equiv$ generalisierte) Koordinaten

$q = \{q_1, \dots, q_f\}$ — beliebige Wahl von entsprechenden f unabhängigen Koordinaten

Die Orte aller Teilchen sind durch $\{q_\alpha\}$ eindeutig festgelegt:

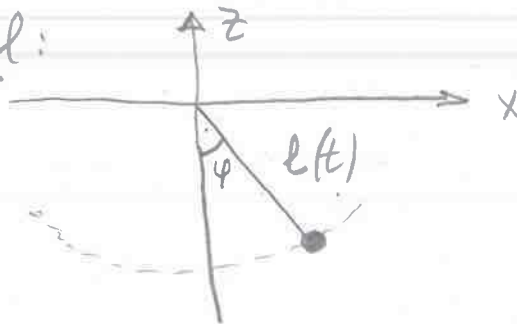
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f; t) \quad i = 1 \dots N$$

Die Zwangsbedingungen sind dabei für beliebige $\{q_\alpha\}$ automatisch erfüllt:

$$A_\mu(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_f, t), \vec{r}_2(q_1, \dots, q_f, t), \dots, \vec{r}_N(q_1, \dots, q_f, t), t) = 0$$

$$\mu = 1, 2, \dots, N_z$$

Beispiel:



ebenes Pendel
mit variabler
Fadenlänge $l(t)$

Der einzige Freiheitsgrad: $f = 1$

Natürliche Wahl der verallgemeinerten Koordinate
— der Winkel φ

$$x = x(\varphi, t) = l(t) \sin \varphi$$

$$y = y(\varphi, t) = 0$$

$$z = z(\varphi, t) = -l(t) \cos \varphi$$

Die Zwangsbedingung $x^2 + z^2 - l^2(t) = 0$
ist automatisch erfüllt

1.2.2. Lagrangefunktion

Bew. - Gl. (Lagrange - Gl. 1. Art):

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\mu=1}^{N_z} \lambda_{\mu} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\left| \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}}, \text{ dann } \sum_{i=1}^N \right.$$

$(\alpha = 1, \dots, f)$

$\Rightarrow (*)$

$$A_{\mu}(q_1, \dots, q_f, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A_{\mu}}{\partial q_{\alpha}} = 0$$

$$A_{\mu}(\{q_{\alpha}\}, t) = A_{\mu}(\{\vec{r}_i(\{q_{\alpha}\}, t)\}, t) \quad \left[\begin{array}{l} A_{\mu} \text{ hängt von } q_{\alpha} \\ \text{über } \vec{r}_i \text{ ab} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A_{\mu}}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = 0$$

Damit fallen aus $\otimes$ die Zwangskräfte heraus.

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, f)$$

f Bewegungsgleichungen für f Funktionen $q_\alpha(t)$

Weitere Umformung:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_\alpha\}, t) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \quad \begin{array}{l} \text{definiert } \dot{\vec{r}}_i \\ \text{als Funktion} \\ \text{von } \{q_\alpha, \dot{q}_\alpha\} \\ \text{und } t \end{array}$$

$$= \dot{\vec{r}}_i(\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha\}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

Wir verwenden das im 1. Term der Gleichung in oben:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right] - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Beweis unten

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \text{kinetische Energie}$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right]$$

$$= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$(*) \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_\beta \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \right] = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \dot{\vec{r}}_i$$

- 9 -

Umformung des 2. Terms in der Gleichung in , Seite 8 oben

Potenzielle Energie: (zunächst konservative Kräfte)

$$U(q, t) = U(\vec{r}_1(q, t), \dots, \vec{r}_N(q, t)) \quad \boxed{q = \{q_\alpha\}, \dot{q} = \{\dot{q}_\alpha\}}$$

$$\sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \left(- \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} U(q, t)$$

Damit lassen sich die Bew.-Gl. in kompakt schreiben als

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, f} \quad \begin{array}{l} \text{Lagrangegleichungen} \\ \text{2. Art} \end{array}$$

$$\boxed{L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)} \quad \text{Lagrangefunktion}$$

Lagrangefunktion, Lagrangegleichungen 2. Art

- der wichtigste Ausgangspunkt zur Lösung von Problemen in der Mechanik

3 Schritte zur Aufstellung von Bew.-Gl. eines Systems mit Zwangsbedingungen:

- ① Wahl einer geeigneten Parametrisation des f -dim. Unterraums $\rightarrow q = \{q_1, \dots, q_f\}$
(verallgem. Koordinaten)
- ② Bestimmung von T und $U \rightarrow L$
- ③ Aufstellung der Lagrangegleichungen

Die Lösung $\{q_\alpha(t)\}$ wird durch Anfangsbedingungen $\{q_\alpha(0), \dot{q}_\alpha(0)\}$ festgelegt.

1.3. Erhaltungsgrößen

Erhaltungssätze spielen eine sehr wichtige Rolle in der Physik. Im Lagrangeformalismus sind Erhaltungsgrößen dadurch gegeben, dass $L(q, \dot{q}, t)$ von einem oder mehreren Argumente nicht abhängt

1.3.1. Energierhaltung

Falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ keine explizite t -Abhängigkeit der Lagrangefunktion

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^f \left[\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} \right] = \sum_{\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \quad (\text{Lagrange-Gl. 2. Art})$$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$
benutzt

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} H = 0}$$

$$\boxed{H = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L}$$

Hamiltonfunktion

Falls die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit t abhängen $\rightarrow \vec{r}_i = \vec{r}_i(q, \vec{p})$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}$$

$$U = U(q, \vec{p}) - \text{unabhängig von } \dot{q}_{\alpha}$$

↑ verallgemeinerter
Massentensor

$$\Rightarrow \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = 2T$$

$$H = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U = E$$

Energie

Damit wird $\frac{dH}{dt} = 0$ zur Energieerhaltung
 $E = \text{const}(t)$

1.3.2. Zyklische Koordinaten

Falls L unabhängig von einer verallgem. Koordinate q_α ist, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

nennt man q_α eine zyklische Koordinate

Bew.-Gl. $\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

$\swarrow$ q_α zyklisch

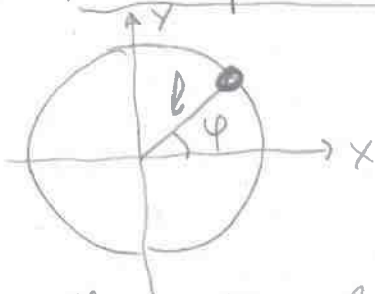
$\Rightarrow \underline{p_\alpha = \text{const}(t)}, \quad \boxed{p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}$ verallgemeinerter Impuls

Beispiele:

(i) freies Teilchen: $U=0$, $L=T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}$ - unabhängig von $\vec{r}$

$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} = \text{const}$ Impulserhaltung

(ii) Massenpunkt auf einem Kreis in der x-y-Ebene



Die geeignete verallgem. Koordinate
 $q = \varphi$ Winkel

$U=0$, $L=T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$
 unabhängig von φ

verallgem. Impuls:

$J_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi} = \text{const}$ Drehimpulserhaltung

1.4 Nichtkonservative Kräfte

Falls $\vec{F}_i$ sich nicht als $-\partial U/\partial \vec{r}_i$ schreiben lassen, müssen die Lagrangegleichungen 2. Art erweitert werden

a) Elektromagnetische Kräfte

Zunächst 1 Teilchen, keine Zwangsbedingungen

$$\vec{F} = Q \cdot [\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad \text{Lorentzkraft}$$

$\vec{F}$ ist von $\vec{r}$ abhängig $\rightarrow$ nicht konservativ
 $\vec{F}$ ist von $\dot{\vec{r}}$ abhängig $\rightarrow$ nicht konservativ
 $\vec{F}$ ist von $\vec{r}$ abhängig $\rightarrow$ nicht konservativ

Die Lagrange-Formulierung für konservative Systeme

soll erweitert werden, indem wir im Potential U auch $\dot{\vec{r}}$ -abhängige Terme zulassen: $U = U(q, \dot{q}, t)$.

Bei unveränderter Anwendung der Lagrange-Gleichungen erhält man

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

$\uparrow$ neu

Mit $(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z) \equiv \vec{r}$

bekommen wir den folgenden Zusatzterm zur Kraft
 (nk = nicht-konservativ)

$$\vec{F}_{nk} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}$$

Gibt es eine Funktion U_{nk} , die nach der Einsetzung in die Lorentzkraft wiedergibt? Ja, aber sie lässt sich nur über das Vektorpotential des Magnetfelds ausdrücken.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & (*) \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} & (**) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}, t) - \text{Skalarpotenzial} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) - \text{Vektorpotenzial} \end{array} \quad [\text{Elektrodynamik} \equiv \text{Kl. Th. Ph. III}]$$

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \underbrace{Q \cdot \Phi(\vec{r}, t)}_{\text{konservativ}} - \underbrace{Q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)}_{\text{nicht-konservativ}}$$

Wir überprüfen, dass die Lorentzkraft richtig rauskommt:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}} = -Q \vec{\nabla}\Phi + Q \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \vec{\nabla} A_j(\vec{r}, t) - Q \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \underbrace{Q \vec{E} + Q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{aus (*)}} - \underbrace{Q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + Q \sum_{j=1}^3 \left[\dot{x}_j \vec{\nabla} A_j(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \dot{x}_j \right]}_{\text{aus (**)}} \quad \uparrow$$

$$\stackrel{(**)}{=} Q \vec{E} + Q \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \quad \text{— Lorentzkraft}$$

In der letzten Umformung haben wir benutzt,
dass $\sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \left(\vec{\nabla} A_j - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \right) = \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

Die Lagrangefunktion hat also die Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - Q \Phi(\vec{r}, t) + Q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Verallgemeinerungen:

- mehrere Teilchen

- Zwangsbedingungen: $\vec{r} = \vec{r}(\{q_\alpha\})$ zu setzen.

b) Reibungskräfte

Fließbach, Kap 9

Kapitel 2. Variationsprinzipien in der Mechanik

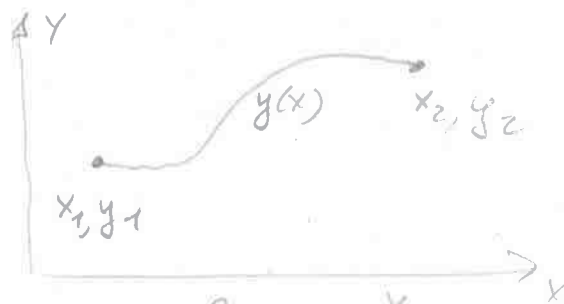
2.1. Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichung

Variationsrechnung: Lösung von Problemen, bei denen der Extremwert (Minimum oder Maximum) eines Funktionals gesucht wird

Funktion $y(x)$: $x \mapsto y$
Zahl Zahl

Funktional $J[y]$: $y(x) \mapsto J$
↑
eckige Klammer!
Funktion Zahl (Wert des Funktionals)

Beispiel



$$J = J[y] = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \\ dy/dx &\equiv y'(x) \end{aligned}$$

- Wegstrecke entlang der Kurve $y(x)$, die die Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) verbindet

[d.h. $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$]

Jede Kurve $y(x)$ mit $\rightarrow$ Zahl $J[y]$ (Weglänge)

Allgemeine Problemstellung:

Gesucht ist die Funktion $y(x)$ mit Randwerten $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$,

die das Funktional $J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$

minimiert. Dabei werden die Funktion $F(y, y', x)$ und die Randwerte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) als gegeben vorausgesetzt.

Lösung: Sei $y(x)$ die gesuchte Funktion.

Für jede infinitesimal abweichende Funktion

$$y(x) + \delta y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x), \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

ϵ - infinitesimal

muss dann gelten

$$J[y + \epsilon \eta] > J[y] \quad \forall \eta(x)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{d\epsilon} J[y + \epsilon \eta] \right|_{\epsilon=0} = 0$$

- eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum

Analogie: Funktion $f(x)$; Extremum bei $x=x_0 \Rightarrow f'(x)|_{x=x_0} = 0$

$$\left. \frac{dJ[y + \epsilon \eta]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Bedingung des Extremums

Partielle Integration des zweiten Terms:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) = \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

(weil $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$)

$$\Rightarrow \left. \frac{dJ[y + \epsilon \eta]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \stackrel{!}{=} 0$$

soll für beliebiges $\eta(x)$ gelten

$$\Rightarrow [\dots] = 0$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}$$

Euler-Lagrange-Gleichung

Euler-Lagrange - Gl. — DGL 2. Ordnung $\leftrightarrow$ Stationarität von $J[y]$

Falls mehrere Lösungen vorliegen, muß man überprüfen, welche Lösung das Minimum bzw Maximum liefert

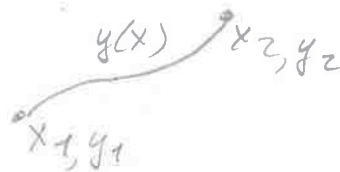
Kurznotationen ($\delta y = \epsilon y$)

$$\begin{aligned} \delta J &= J[y + \delta y] - J[y] = \int dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) \\ &= \int dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Euler-Lagrange - Gl.}$$

Funktionalableitung

Beispiel (S. 14)



Kürzeste Verbindung zwischen den vorgegebenen Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2)

$$F = \sqrt{1 + (y')^2}$$

Euler-Lagrange - Gl.:

$$\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = \text{const} \Rightarrow y = ax + b \quad \begin{array}{l} (a, b \text{ durch} \\ \text{Randpunkte} \\ \text{festgelegt}) \end{array}$$

$\rightarrow$ eine Gerade

Verallgemeinerungen:

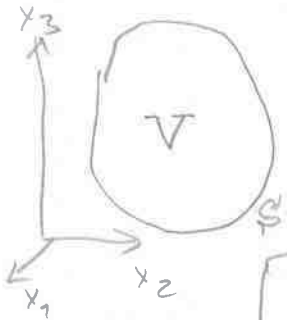
(i) mehrere Funktionen $J = J[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_1, \dots, y_N, y_1', \dots, y_N', x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y_i'} - \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N}$$

$y = \{y_1, \dots, y_N\}$
 $y' = \{y_1', \dots, y_N'\}$

(ii) mehrere Argumente $x_1 \dots x_N$

$$J = J[y] = \int_V dx_1 \dots dx_N F(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_N}, x_1 \dots x_N)$$



$y(x_1 \dots x_N)$ - vorgegeben am Rand des Integrationsbereichs V (S)

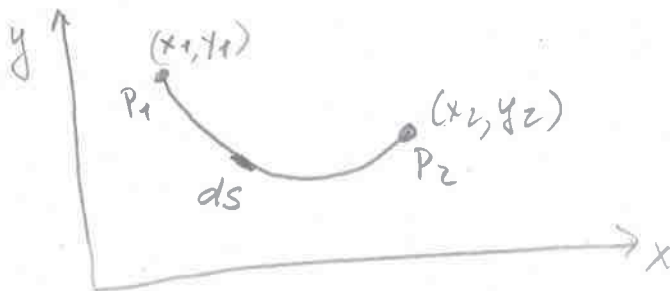
$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial F}{\partial (\partial y / \partial x_i)} \right] - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

betrachtet als Funktionen von $\{x_j\}$

2.2. Variationsprobleme mit Nebenbedingung

Variationsproblem, bei dem die gesuchte Funktion einer (oder mehreren) Bedingung(en) genügen muss

Beispiel: eine Kette, die an zwei Punkten P_1, P_2 aufgehängt ist und der Schwerkraft unterliegt.



Die Kette hat die konstante Massendichte ρ und Länge L

Frage: Welche Kurvenform nimmt die Kette an?

Im Gleichgewicht ist die potentielle Energie U_{pot} minimal

$$J[y] = U_{\text{pot}} = \int_1^2 dm \cdot g \cdot y$$

$\uparrow$ Kurvenform $y(x)$ $\uparrow$ Masselement $dm = \rho ds$ $\uparrow$ Erdbeschleunigung

ds - Wegelement; $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$

$$J[y] = \underbrace{\rho g}_{\substack{\uparrow \\ \text{const, nicht wichtig für das Problem}}} \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1+y'^2} = \text{minimal}$$

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_1 \\ y(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

Nebenbedingung: Länge L

$$\rightarrow K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+y'^2} = L$$

Nebenbedingungen der Form $K[y] = C$ heißen isoperimetrisch

Nebenbedingungen lassen sich mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren in ein verallgemeinertes

Extremalprinzip aufgenommen werden

2.2.1. Lagrange-Multiplikatoren

Zunächst für Funktionen, danach Verallgemeinerung auf Funktionale

Problem: $f(x, y) = \min$ wobei $g(x, y) = 0$

$$g(x, y) = 0 \rightarrow y = y_g(x) : g(x, y_g(x)) = 0$$

Wir suchen das Minimum von f auf der Kurve

$$y_g(x) \rightarrow \text{Minimum von } h(x) = f(x, y_g(x))$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} f(x, y_g) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_g) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_g) \cdot y_g'(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad (*)$$

Dies ist eine Gleichung für die Koordinate x_m des Minimums; danach y_m kann als $y_m = y_g(x_m)$ bestimmt werden.

Methode der Lagrange-Multiplikatoren: explizite

Auflösung von $g(x, y) = 0$ nach $y = y_g(x)$ kann vermieden werden:

$$\text{Funktion } f^*(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \stackrel{!}{=} \text{minimal}$$

λ ein Parameter, noch zu bestimmen

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

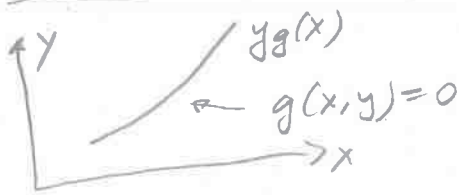
Minimum gesucht ohne Rücksicht auf die Nebenbedingung

Dann wird λ so angefaßt, daß die Nebenbedingung erfüllt wird

Vorteil:

- 19 -
Keine Notwendigkeit die Nebenbedingung nach y aufzulösen

Beweis der Äquivalenz des Systems $(**)$ zur Gl. $(*)$



$$\frac{dy}{dx} = y_g'(x)$$

$$\underbrace{g(x+dx, y+dy)}_0 - \underbrace{g(x, y)}_0 = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = \left[\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y_g' \right] dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} + y_g' \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = y_g(x)$$

Multiplizieren die 2. Gleichung des Systems $(**)$ mit y_g' und addieren mit der 1. Gleichung [dabei $y = y_g(x)$]:

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_g(x)) + y_g'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_g(x)) = 0 \quad \text{— die Gl. } (*)$$

Wir haben bewiesen, dass jede Lösung von $(**)$ auch Lösung von $(*)$ ist. Man kann zeigen, dass dies auch umgekehrt gilt. ■

Verallgemeinerung

$$f(x_1, \dots, x_N) = \min$$

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_N) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, R$$

$\rightarrow N+R$ Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f(x_1, \dots, x_N) - \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha g_\alpha(x_1, \dots, x_N) \right] = 0 & (i=1, \dots, N) \\ g_\alpha(x_1, \dots, x_N) = 0 & (\alpha=1, \dots, R) \end{cases}$$

für $N+R$ Unbekannten

x_i und λ_α

⌞ Koordinate des Extremums

2.2.2. Variationsprobleme für Funktionale mit isoperimetrischer Nebenbedingung

Allgemeine Problemstellung

Gesucht wird die Funktion $y(x)$, für die

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) = \text{minimal}$$

unter der isoperimetrischer Nebenbedingung

$$K = K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, G(y, y', x) = C$$

Dabei werden die Randwerte festgehalten:

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

Lösung: Sei $y(x)$ die gesuchte Funktion

Wir betrachten eine infinitesimale Abweichung

Wir betrachten
 $y(x) + \epsilon_1 \eta_1(x) + \epsilon_2 \eta_2(x)$; η_1, η_2 - zwei beliebige
 linear unabhängige Funktionen
 mit $\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = \eta_2(x_1) =$
 $= \eta_2(x_2) = 0$;
 ϵ_1, ϵ_2 - infinitesimal

Nebenbe dingung:

Nebenbedingung:
 $K(e_1, e_2) = K[y + e_1 \eta_1 + e_2 \eta_2] = C$ — definiert eine Kurve in (e_1, e_2) -Ebene

Es muss gelten

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = J[y_0 + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2] = \text{minimal}$$

unter der Nebenbedingung $K(\epsilon_1, \epsilon_2) = C$

$J(e_1, e_2), K(e_1, e_2) - C$ - Funktionen $\Rightarrow$ wir können die Ergebnisse von 2.2.1 benutzen (Methode der Lagrange-Multiplikatoren)

$\rightarrow J(e_1, e_2) - \lambda K(e_1, e_2) = \text{minimal}$
bei $e_1, e_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial (J - \lambda K)}{\partial \epsilon_i} \bigg|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0} = 0 \quad (i=1, 2)$$

η_1, η_2 sind beliebig $\rightarrow$ Minimum von $J[y] - \lambda K[y]$ bezüglich aller Variationen $y \rightarrow y + \delta y$

$$\Rightarrow J^*[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F^*(y, y', x) = \text{minimal}$$

$$F^* = F - \lambda G$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F^*(y, y', x)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial G(y, y', x)}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G(y, y', x)}{\partial y}$$

DGL 2. Ordnung $\rightarrow$ 2 Integrationskonstante C_1, C_2

$\rightarrow$ Lösung $y(x, C_1, C_2, \lambda)$

Die drei Parameter C_1, C_2, λ sind durch die Randbedingungen und die Nebenbedingung festgelegt

Verallgemeinerung: mehrere Nebenbedingungen

$$K_i[y] = \int_{x_1}^{x_2} G_i(y, y', x) dx = C_i \quad i = 1, \dots, R$$

$\rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung für:

$$F^*(y, y', x) = F(y, y', x) - \sum_{i=1}^R \lambda_i G_i(y, y', x)$$

$\rightarrow$ Lösung $y(x, C_1, C_2, \{\lambda_i\})$

$R+2$ Parameter — aus Randbedingungen + R Nebenbedingungen zu bestimmen

2.2.3. Holonome Nebenbedingungen

$$J[y_1, y_2] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_1, y_2, y_1', y_2', x) = \text{extremal}$$

holonome Nebenbed.: $g(y_1, y_2, x) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad + \text{Randbedingungen}$

viel einschränkender als eine isoperim. Nebenbed.

Fließbach, Kap. 13: Euler-Lagrange - Gl für

$$F^*(y_1, y_2, y_1', y_2', x) = F(y_1, y_2, y_1', y_2', x) - \lambda(x) g(y_1, y_2, x)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_i} & i=1,2 \\ g(y_1, y_2, x) = 0 \end{cases}$$

↑
Lagrange - Multiplikator
x - abhängig

2 DGL + Nebenbed. $\rightarrow$ 3 Funktionen
 $y_1(x), y_2(x), \lambda(x)$

Randbed. $\rightarrow$ Integrationskonstanten

Verallg.: N Funktionen $y_1(x) \dots y_N(x)$
 $R < N$ holonome Zwangsbed. $g_\alpha(y_1, \dots, y_N, x) = 0$

$$\rightarrow F^*(y_1, \dots, y_N, y_1', \dots, y_N', x) = F - \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(x) g_\alpha(y_1, \dots, y_N, x)$$

N Euler-Lagr - Gl.
R ~~Zwangsbed.~~ Zwangsbed. $\rightarrow$ N+R Funktionen
 $y_i(x), \lambda_\alpha(x)$

2.3. Hamiltonsches Prinzip ("Prinzip der kleinsten Wirkung")

Eine elegante Formulierung der Grundgesetze der Mechanik:

Variationsprinzip, dessen Euler-Lagrange-Gleichungen die Lagrangegleichungen der Mechanik sind.

2.3.1. Lagrange - Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

↔ Euler-Lagrange-Gleichungen für Stationarität des Funktionals

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = \text{stationär}$$

$$\underline{\text{Wirkungsfunktional}} \equiv \underline{\text{Wirkung}}$$

Jeder Weg $q(t) \rightarrow$ Wirkung S
Bei der Variation werden Endpunkte festgehalten:
 $q_\alpha(t_1) = q_{1\alpha}; \quad q_\alpha(t_2) = q_{2\alpha}$

Hamiltonsches Prinzip

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}$$

Die Bewegung läuft so ab, dass die Bahnkurve die Wirkung stationär macht. Meist wird S minimal
→ "Prinzip der kleinsten Wirkung"

2.3.2. Lagrangegleichungen 1. Art

System von N Massenpunkten

$$\vec{r} = \{\vec{r}_i\}$$

Lagrangefunktion
$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$$

N_Z Zwangsbedingungen:
$$A_\mu(\underbrace{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N}_{\vec{r}}, t) = 0 \quad \mu = 1, \dots, N_Z$$

Lagrange-Gl. 1. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i}$$

Andererseits, betrachten wir das Variationsproblem

$$S' = S[\vec{r}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \text{stationär, wobei}$$

Nebenbedingungen $\rightarrow A_\mu(\vec{r}, t) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, N_Z)$

Methode der Lagrange-Multiplikatoren

$$\rightarrow \delta S^*[\vec{r}] = 0$$

mit
$$S^*[\vec{r}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) A_\mu(\vec{r}, t) \right] \equiv L^*(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Schreiben "+" (nicht "-"),
um das übliche
Vorzeichen in
den Lagrange-Gl. 1. Art
zu bekommen

Lagrange-Multipl.
Hier Funktionen von,
weil die Nebenbed.
 $A_\mu(\vec{r}, t) = 0$ zu jedem
Zeitpunkt gelten
(holonome Zwangsbed.)

Die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen
sind identisch mit Lagrange-Gl. 1. Art

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L^*(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0 \iff \text{Lagrange-Gl. 1. Art}$$

Hamiltonsches Prinzip — allgemeinste und kompakteste Formulierung der Mechanik; ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Weiterer Vorteil: die Form der Lagrangefunktion lässt sich durch Symmetriebedingungen stark einschränken.

Beispiel: freies Teilchen

- (1) Homogenität der Zeit $\rightarrow L$ kann nicht explizit von t abhängen
- (2) Homogenität des Raums $\rightarrow L$ kann nicht explizit von $\vec{r}$ abhängen
- (3) L muss isotrop sein
 $\Rightarrow L$ ist eine Funktion von $\dot{\vec{r}}^2$

Einfachste Möglichkeit: $L = \text{const} \cdot \dot{\vec{r}}^2$
richtig (mit $\text{const} = \frac{m}{2}$)

Höhere Potenzen kann man mit Hilfe der Galilei-Invarianz ausschliessen (siehe unten)

2.3.3. Unbestimmtheit der Lagrangefunktion:

Eichtransformationen

Es kann verschiedene Lagrangefunktionen geben, die zu denselben Bewegungsgleichungen führen:

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

$$q = \{q_1, \dots, q_f\}$$

↑ beliebige Funktion
↑ totale Zeitableitung

$$\text{Wirkung } S^* = \int_{t_1}^{t_2} dt L^* = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt L}_{= S} + \underbrace{f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)}_{= \text{const}}$$

(Bei der Variation werden Endpunkte festgehalten.)

$$\Rightarrow \delta S^* = \delta S$$

$\Rightarrow$ Bedingungen $\delta S^* = 0$ und $\delta S = 0$ sind identisch $\rightarrow$ führen zu denselben Bewegungsgleichungen

Beispiele:

(i) Galileitransformation für ein freies Teilchen:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{v} \quad ; \quad \vec{v} = \text{const}$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \rightarrow L^* = \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}} + \vec{v})^2 = L + m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} \vec{v}^2$$

$$= L + \frac{d}{dt} \left(m \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} \vec{v}^2 t \right)$$

$\rightarrow L^*$ und L äquivalent: $L^* = L + \frac{d}{dt} f(\vec{r}, t)$ Galilei-invarianz

Höhere Potenzen von $\dot{\vec{r}}^2$ in L würden die Galilei-invarianz verletzen $\Rightarrow$ sind ausgeschlossen

(ii) Eichtransformation in der Elektrodynamik

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad - \text{Definition von } \Phi \text{ und } \vec{A}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t); \Phi = \Phi(\vec{r}, t); \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Diese Definition legt $\vec{A}$ und Φ nur bis auf Eichtransformationen fest:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda ; \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} ; \quad \Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind unter solcher Transformation beliebige Funktion invariant.

Die Lagrangefunktion ändert sich dabei wie

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - Q\Phi + Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

$$\rightarrow L + Q \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + Q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} \Lambda = L + Q \frac{d\Lambda(\vec{r}, t)}{dt}$$

$\Rightarrow$ Invarianz der Bewegungsgleichungen unter der Eichtransformationen

totale Zeitliche Ableitung

2.4. Noethertheorem: Symmetrien und Erhaltungsgrößen

[Emmy Noether (1882 - 1935)]

Der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen wurde bereits in 1.3 diskutiert. Auf der Grundlage des hamiltonschen Prinzips kann dieser Zusammenhang allgemein formuliert werden:

Jede einparametrische Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgröße (Noethertheorem)

Transformation der Koordinaten und der Zeit

($i=1, \dots, N$)

$$x_i \rightarrow x_i^* = x_i + \epsilon \psi_i(x, \dot{x}, t) + O(\epsilon^2)$$

$$t \rightarrow t^* = t + \epsilon \varphi(x, \dot{x}, t) + O(\epsilon^2)$$

betrachten infinitesimale ϵ

Damit $x(t) \rightarrow x^*(t^*)$

Beispiele:

(i) Zeittranslation: $t^* = t + \epsilon$, $x_i^*(t^*) = x_i(t)$

$$\varphi = 1, \quad \varphi_i = 0$$

(ii) Räumliche Translation: $t^* = t$, $x_i^* = x_i + \epsilon$

$$\varphi = 0, \quad \varphi_i = 1$$

(iii) Drehung: $t^* = t$, $\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\varphi = 0, \quad \vec{\varphi} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(iv) Galileitransformation: $t^* = t$, $\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon \vec{v} t$

$$\varphi = 0, \quad \vec{\varphi} = \vec{v} t$$

Wir vergleichen die ursprüngliche Wirkung, d.h. das Funktional $S[x(t)]$ mit Randbedingungen

$$x_i(t_{1,2}),$$

mit der transformierten Wirkung

$$S^* \equiv S[x^*(t^*)] = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(x^*, \dot{x}^*, t^*)$$

mit den transformierten Randbedingungen

$$x_i^*(t_{1,2}^*) = x_i(t_{1,2}) + \epsilon \varphi_i(x(t_{1,2}), \dot{x}(t_{1,2}), t_{1,2})$$

Falls $\underline{S^* = S}$, d.h. $S[x^*(t^*)] = S[x(t)]$, gilt, ist die Wirkung invariant unter der betrachteten Transformation. Es gilt dann $\frac{\partial S}{\partial \epsilon} = 0$

Aus dieser Invarianz lässt sich ein Erhaltungssatz ableiten:

$$\frac{d}{dt} Q(x, \dot{x}, t) = 0 \quad \text{wobei} \quad Q = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \varphi_i + \left(L - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi.$$

Beweis

$$S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(x^*, \dot{x}^*, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dt^*}{dt} L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*)$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt L(x, \frac{dx}{dt}, t)}_S + \epsilon \left. \frac{d}{d\epsilon} \left\{ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right\} \right|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2)$$

$$S^* = S \Rightarrow \left. \frac{d}{d\epsilon} \left\{ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right\} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

$$t^* = t + \epsilon \varphi \Rightarrow \frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon \frac{d\varphi}{dt}$$

$$x_i^* = x_i + \epsilon \varphi_i \Rightarrow \frac{dx_i^*}{dt^*} = \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \left(\frac{dx_i}{dt} + \epsilon \frac{d\varphi_i}{dt} \right) \left(1 - \epsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) + O(\epsilon^2)$$

$$= \dot{x}_i + \epsilon \frac{d\varphi_i}{dt} - \epsilon \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt} + O(\epsilon^2)$$

Damit $\left. \frac{d}{d\epsilon} \{ \} \right|_{\epsilon=0} =$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left\{ L(x_i + \epsilon \varphi_i, \dot{x}_i + \epsilon \frac{d\varphi_i}{dt} - \epsilon \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt}, t + \epsilon \varphi) \left(1 + \epsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) \right\} \right|_{\epsilon=0}$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \varphi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{d\varphi_i}{dt} - \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \varphi + L \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \varphi_i}_{= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \varphi_i \right) + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$$

Invarianz $S^* = S$

Wir wollen das als totale zeitliche Ableitung ausdrücken.
Dafür verwenden wir

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] \dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right)$$

und erhalten

$$\frac{d}{dt} Q(x, \dot{x}, t) = 0$$

mit der Erhaltungsgröße

$$Q = Q(x, \dot{x}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi = \text{const}$$

Noethertheorem

Symmetrie $S^* = S$
gegenüber einer einparametrischen
Raum-Zeit-Transformationsschar
(bestimmt durch φ und ψ_i)



Erhaltungsgröße

$$Q = Q(x, \dot{x}, t) = \text{const}$$

Beispiele

(i) Homogenität der Zeit

$L = L(x, \dot{x})$ - hängt nicht explizit von der Zeit ab
⇒ S invariant unter $\begin{matrix} x_i^* = x_i \\ t^* = t + e \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \psi_i = 0 \\ \varphi = 1 \end{matrix}$

⇒ Erhaltungsgröße $Q = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \equiv -H = \text{const}$
 $\uparrow$
 Hamiltonfunktion
 (Abschnitt 1.3.1)

Falls $L = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - U(x)$

haben wir $Q = T - U - 2T = -(T + U) = -E$
 $\uparrow$
 Energie des Systems
Energieerhaltung

(ii) Homogenität des Raums:

L ist unter zeitunabhängigen räumlichen Verschiebungen invariant
 z.B. Verschiebung in x -Richtung

$$\begin{matrix} \vec{r}_n^* = \vec{r}_n + e \hat{x} \\ t^* = t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \psi_{nx} = 1, \quad \psi_{ny} = \psi_{nz} = 0 \\ \varphi = 0 \end{matrix}$$

↑
Vektor (1, 0, 0)

⇒ Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = \sum_n p_{nx} = P_x = \text{const}$$

Impulserhaltung
(Abschnitt 1.3.2)

Hier $\vec{p}_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_n}$ - Impuls des n-ten Teilchens

$\vec{P}$ - der Gesamtimpuls des Systems

iii) Isotropie des Raumes:

Invarianz von L unter Rotationen um eine beliebig gerichtete Achse $\hat{\omega}$ durch einen Bezugspunkt (der als Ursprung gewählt wird):

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon \hat{\omega} \times \vec{r}$$

$$t^* = t$$

$$\vec{\psi} = \hat{\omega} \times \vec{r}, \quad \text{d.h. } \psi_i = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{ikl} \hat{\omega}_k x_l$$

$$\psi = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Erhaltungsgröße } Q &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i = \sum_i p_i \epsilon_{ikl} \hat{\omega}_k x_l \\ &= \vec{p} \cdot (\hat{\omega} \times \vec{r}) = \hat{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= \hat{\omega} \cdot \vec{L} = \text{const} \end{aligned}$$

mit dem Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Drehimpulskomponente
in Richtung
der Drehachse

2.4.1. Erweitertes Noether-Theorem

Die geforderte Invarianzbedingung $S^* = S$ ist stärker als die eigentlich wesentliche Bedingung der Invarianz der Bewegungsgleichungen. Dies ist äquivalent zu

$$\delta S^* = \delta S$$

→ Auch solche Transformationen werden als Invarianzoperationen zugelassen, die L um eine totale Zeitableitung ändern.
→ Die Invarianzbedingung lautet:

-32-

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left[L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right] \right|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} f(x, t)$$

↑
beliebig

→ Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi - f(x, t) = \text{const}$$

Beispiel: Galileiinvarianz

$$\begin{array}{l} \vec{r}_n^* = \vec{r}_n + \epsilon t \hat{u} \\ t^* = t \end{array} \quad \left| \rightarrow \quad \begin{array}{l} \vec{\psi}_n = t \hat{u} \\ \varphi = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \hat{u} - \text{normierter} \\ \text{Geschwindigkeits-} \\ \text{vektor} \end{array}$$

Wir betrachten ein System von N Teilchen

$$L = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n^2 - \sum_{\substack{n, m \\ n < m}} V_{nm} (|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)$$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left[L^* \frac{dt^*}{dt} \right] \right|_{\epsilon=0} = \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \cdot \hat{u} = \frac{d}{dt} (M \vec{R} \cdot \hat{u}) \equiv \frac{df}{dt}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_n m_n \vec{r}_n \quad - \text{Schwerpunktvektor}$$

$$M = \sum_n m_n \quad - \text{Gesamtmasse}$$

→ Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} Q &= \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_n} \vec{\psi}_n - f(x, t) = \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \cdot t \hat{u} - M \vec{R} \cdot \hat{u} \\ &= M (\vec{R} t - \vec{R}) \cdot \hat{u} = \text{const} \end{aligned}$$

Dies gilt für beliebige Richtung $\hat{u}$ der Geschwindigkeit



$$\rightarrow \boxed{\dot{\vec{R}}t - \vec{R} = \text{const}}$$

Dies kann zu

$$\vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0 \quad \text{aufintegriert werden}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
const

Dies folgt aber bereits aus der Impulserhaltung

Kapitel 3. Kleine Schwingungen in Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

3.1. Lagrangefunktion

Wir betrachten ein System mit f Freiheitsgraden

$[q_1 \dots q_f - \text{Verallgemeinerte Koordinaten}]$

und der

Lagrangefunktion: $L = L(q_1 \dots q_f; \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)$

$$q = (q_1 \dots q_f)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f T_{ij}(q_1 \dots q_f) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1 \dots q_f)$$

Wir nehmen an, dass $U(q_1 \dots q_f)$ ein Minimum am Punkt

$(q_1^{(0)} \dots q_f^{(0)})$ hat $\rightarrow$ stabile Gleichgewichtslage $\Rightarrow \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q^{(0)}} = 0$

Wir entwickeln U um diese Stelle:

$$U(q_1 \dots q_f) = U(q_1^{(0)} \dots q_f^{(0)}) + \sum_{i=1}^f \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q^{(0)}} (q_i - q_i^{(0)}) = 0$$

const

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q^{(0)}} (q_i - q_i^{(0)}) (q_j - q_j^{(0)}) + \dots$$

vernachlässigt
(kleine Auslenkungen)

$$x_i = q_i - q_i^{(0)}$$

Auslenkungen
aus der Gleichgewichtslage

$$\rightarrow U \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f V_{ij} x_i x_j, \quad V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q^{(0)}}$$

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f T_{ij}(q_1 \dots q_f) \dot{q}_i \dot{q}_j \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \underbrace{T_{ij}(q_1^{(0)} \dots q_f^{(0)})}_{= m_{ij}} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

$\approx T_{ij}(q^{(0)})$

→ Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j)$$

Lagrangegleichungen

$$\left[\sum_{j=1}^f m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^f V_{ij} x_j = 0 \right] \quad i=1, \dots, f$$

In der Matrixform:

$$\boxed{m \ddot{x} + V x = 0}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{f1} & \dots & m_{ff} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{f1} & \dots & V_{ff} \end{pmatrix}$$

m, V - symmetrisch und positiv definite Matrizen:

$$V_{ij} = V_{ji}; \quad \sum_{i,j=1}^f V_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{Eigenwerten} \\ \text{von } V \\ \text{sind positiv} \end{array}$$

$$m_{ij} = m_{ji}; \quad \sum_{i,j=1}^f m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j > 0 \quad \forall \dot{x} \neq 0 \quad \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{Eigenwerte von } m \\ \text{sind positiv} \end{array}$$

3.2. Eigenschwingungen

Ansatz $\boxed{x = A e^{i\omega t}}$, d.h., $\boxed{x_j = A_j e^{i\omega t}}$

Bemerkung. Eigentlich soll die gesuchte Lösung $x(t)$ reell sein. Es ist aber bequem, den komplexen Ansatz zu verwenden.

Am Ende ersetzen wir

$$x = A e^{i\omega t} \rightarrow \operatorname{Re}(A e^{i\omega t})$$

Da m, V reell sind, ist mit $x(t)$ auch $\operatorname{Re} x(t)$ eine Lösung.

$$\rightarrow \sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega^2 m_{ij}) A_j = 0 \quad \text{oder} \quad (V - \omega^2 m) A = 0$$

Lineares, homogenes System.

Falls $\det(V - \omega^2 m) \neq 0$ ist $A = 0$ die einzige Lösung.

Eine nichttriviale ($A \neq 0$) Lösung existiert nur wenn

$$\boxed{\det(V - \omega^2 m) = 0}$$

Polynom von Grad f in ω^2 : $P^{(f)}(\omega^2) = \det(V - \omega^2 m)$
(mit reellen Koeffizienten)

$P^{(f)}(\omega^2)$ hat f Nullstellen: $P^{(f)}(\omega_k^2) = 0 \quad k=1, \dots, f.$

Jedem ω_k^2 entspricht ein Eigenvektor $A^{(k)}$:

$$\sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$$

Im allgemeinen sind Nullstellen eines Polynoms komplex. Wir werden aber beweisen, dass

- (1) alle ω_k^2 reell und positiv sind: $\omega_k^2 \in \mathbb{R}, \omega_k^2 > 0$
($k=1, \dots, f$);
- (2) die Eigenvektoren $A^{(k)}$ können auch reell gewählt werden;
- (3) die reellen Eigenvektoren $A^{(k)}$ sind linear unabhängig (und bilden damit eine Basis).

Beweis

$$(1) \sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$$

multiplizieren mit dem komplex konjugierten Vektor $A_i^{(k)*}$

$$\rightarrow \sum_{ij} (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{(k)*} = 0$$

$$\rightarrow \omega_k^2 = \frac{\sum_{ij} V_{ij} A_j^{(k)} A_i^{(k)*}}{\sum_{ij} m_{ij} A_j^{(k)} A_i^{(k)*}}$$

$$\sum_{ij} V_{ij} A_j^{(k)} A_i^{(k)*} = \underbrace{\sum_{ij} V_{ij} \operatorname{Re} A_j^{(k)} \operatorname{Re} A_i^{(k)*}}_{\text{reell und } > 0} + \underbrace{\sum_{ij} V_{ij} \operatorname{Im} A_j^{(k)} \operatorname{Im} A_i^{(k)*}}_{V_{ij} \text{ positiv definit}}$$

V_{ij} symmetrisch

Genauso $\sum_{ij} m_{ij} A_j^{(k)} A_i^{(k)*}$ reell und > 0

$\Rightarrow \omega_k^2$ reell und > 0

(2) $\sum_{j=1}^{\pm} \underbrace{(V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij})}_{\in \mathbb{R}} A_j^{(k)} = 0$

reeller
Eigenvektor

$\rightarrow \sum_{j=1}^{\pm} (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) \operatorname{Re} A_j^{(k)} = 0$
(und auch $\operatorname{Im} A_j^{(k)}$)

(3) $\sum_{j=1}^{\pm} (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$ multipl. mit $A_i^{(p)}$ ($p \neq k$)

$\Rightarrow \sum_{ij} (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{(p)} = 0$

Die entspr. Gleichung mit $k \leftrightarrow p$

$\sum_{ij} (V_{ij} - \omega_p^2 m_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{(p)} = 0$

(wir haben die
Indizes umgekehrt:
 $i \leftrightarrow j$)

Differenz der beiden Gleichungen:

$(\omega_p^2 - \omega_k^2) \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = 0$

(i) alle ω_k^2 sind unterschiedlich

$\rightarrow \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = 0$

verallgemeinerte Orthogonalität
für die Eigenvektoren $A^{(k)}$:
 $A^{(p)T} m A^{(k)} = 0$ für $p \neq k$

Lineare Unabhängigkeit: nehmen wir den Gegensatz an:

$$\sum_k C_k A_j^{(k)} = 0 \rightarrow \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} \left(\sum_k C_k A_j^{(k)} \right) = 0$$

Andererseits

$$\begin{aligned} \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} \left(\sum_k C_k A_j^{(k)} \right) &= \sum_k C_k \underbrace{\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)}}_{=0 \text{ für } p \neq k} = \\ &= C_p \underbrace{\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(p)}}_{>0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_p = 0 \text{ für alle } p$$

Damit sind Vektoren $A^{(k)}$ linear unabhängig.

$\rightarrow$ Sie bilden eine Basis.

(ii) Zwei Eigenwerte fallen zusammen:

$$\omega_k^2 = \omega_l^2 \text{ für } k \neq l. \text{ Mann kann zeigen, dass dann zwei unabhängige Eigenvektoren gibt.}$$

Dann ist auch eine beliebige lineare Kombination $\alpha A^{(k)} + \beta A^{(l)}$ auch ein Eigenvektor (mit der gleichen ω_k^2).

Mann kann zwei solche Kombinationen $A^{(k)}, A^{(l)}$ so wählen, dass sie Orthogonalität erfüllen

$$A^{(l)T} m A^{(k)} = 0$$

ω_k - Eigenfrequenzen

$$x_j(t) = A_j^{(k)} e^{i\omega_k t} \quad - \quad \text{Eigenschwingungen (Eigenmoden)}$$

3.3. Normalkoordinaten

Wir haben gezeigt, dass die reelle Eigenvektoren orthogonal in der Sinne $\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = 0$ ($p \neq k$) sind.
Wir normieren sie so, dass

$$\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = \delta_{pk} \quad (*)$$

Diese Gleichungen können in der Matrixform dargestellt werden:

$$\begin{aligned} a_{ik} = A_i^{(k)} \quad (\text{Matrix}) & \rightarrow \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = \sum_{ij} m_{ij} a_{ip} a_{jk} \\ & = \sum_{ij} a_{pi}^T m_{ij} a_{jk} \stackrel{(*)}{=} \delta_{pk} \end{aligned}$$

$$\rightarrow a^T m a = \hat{1} \quad \leftarrow \text{Einheitsmatrix}$$

Weiter gilt

$$\sum_j (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{ij} V_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = \omega_k^2 \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = \omega_k^2 \delta_{p,k}$$

$$\rightarrow a^T V a = \hat{\omega}^2 \leftarrow \text{diagonale Matrix mit Elementen } \omega_k^2$$

Wir benutzen jetzt die Basis $\vec{A}^{(k)}$, um die neuen verallgemeinerten Koordinaten zu definieren.

Dafür zerlegen wir $\vec{x}$ in der Basis $\vec{A}^{(k)}$:

$$x_i(t) = \sum_k Q_k(t) A_i^{(k)} \quad \rightarrow \quad x = a Q$$

→ Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j) = \frac{1}{2} (\dot{x}^T m \dot{x} - x^T V x) \\
 &= \frac{1}{2} [(a\dot{Q})^T m a\dot{Q} - (aQ)^T V (aQ)] = \frac{1}{2} [\underbrace{\dot{Q}^T a^T m a}_{\hat{1}} \dot{Q} - \underbrace{Q^T a^T V a}_{\omega^2} Q] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_k (\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2 Q_k^2) \quad \left(Q_i - \text{Normalkoordinaten} \right. \\
 &\quad \left. \text{diagonal!} \right)
 \end{aligned}$$

→ entkoppelte Bewegungsgleichungen

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0 \quad (p = 1, \dots, f)$$

$$\rightarrow Q_k(t) = C_k e^{i\omega_k t}$$

C_k - beliebige komplexe Konstante

$$C_k = |C_k| e^{i\varphi_k}$$

Q muss eigentlich reell sein

$$\rightarrow Q_k(t) = \text{Re}(C_k e^{-i\omega_k t}) = |C_k| \cos(\omega_k t - \varphi_k)$$

$$\rightarrow x_i(t) = \sum_k Q_k(t) A_i^{(k)} = \sum_k |C_k| A_i^{(k)} \cos(\omega_k t - \varphi_k)$$

2f reellen Konstanten $\{|C_k|, \varphi_k\}$ mit denen man beliebige Anfangsbedingung $\{x_i(0), \dot{x}_i(0)\}$ genügen kann.