

Übungen zu Moderne Theoretischen Physik III SS 16**Prof. Dr. A. Shnirman****Blatt 12****PD Dr. B. Narozhny, Dr. P. Schad****Besprechung: Freitag, 08.07.2016****1. Energieeigenzustände**

(20 Punkte, schriftlich)

Ist der Hamiltonoperator eines quantenmechanischen Vielteilchensystems bekannt, kann man durch Diagonalisieren die Energieeigenzustände des Systems bestimmen, die im Allgemeinen sehr wichtig für das Verständnis physikalischer Prozesse sind. Betrachten Sie in dieser Aufgabe ein System aus zwei verschiedenen Arten von Bosonen, beschrieben durch (Einteilchen-)Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger, a$ und $b^\dagger, b$. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$H = \omega_A a^\dagger a + \omega_B b^\dagger b + \lambda (a^\dagger b^\dagger + ba) \quad (1)$$

mit $0 < \omega_A < \omega_B$.

Zeigen Sie, dass H auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$H = \omega_C c^\dagger c + \omega_D d^\dagger d + \text{konst.} \quad (2)$$

wobei $c^\dagger, c$ sowie $d^\dagger, d$ auch bosonische Operatoren sind und $\omega_C < \omega_D$. Finden Sie den Zusammenhang zwischen Operatoren $a^{(\dagger)}, b^{(\dagger)}$ und $c^{(\dagger)}, d^{(\dagger)}$ und zeigen Sie, dass

$$\omega_C = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\omega_B - \omega_A)^2 - 4\lambda^2} - (\omega_B - \omega_A) \right), \quad (3)$$

$$\omega_D = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\omega_B - \omega_A)^2 - 4\lambda^2} + (\omega_B - \omega_A) \right). \quad (4)$$

Bestimmen Sie außerdem die Erwartungswerte $\langle d^\dagger d \rangle$, $\langle a^\dagger a \rangle$ und $\langle a^\dagger b^\dagger \rangle$ im Grundzustand.

2. Operatoren in zweiter Quantisierung

(35 Punkte, schriftlich)

In der Vorlesung wurde die Darstellung bosonischer Einteilchenoperatoren $\hat{F}^{(1)}$ in zweiter Quantisierung hergeleitet. Demnach ist $\hat{F}^{(1)} = \sum_a \hat{f}_{x_a}^{(1)}$ (Operator $\hat{f}_{x_a}^{(1)}$ wirkt auf Koordinate x_a) identisch zu

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | \hat{f}^{(1)} | j \rangle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j, \quad (5)$$

mit den Einteilchenzuständen $|i\rangle$. Die Diagonalelemente der bosonischen Operatoren waren hierbei gegeben durch

$$\langle N_1, N_2, \dots | \hat{F}^{(1)} | N_1, N_2, \dots \rangle = \sum_i N_i \langle i | \hat{f}^{(1)} | i \rangle, \quad (6)$$

und die Nicht-Diagonalelemente durch

$$\langle \dots, N_i, \dots, N_j - 1, \dots | \hat{F}^{(1)} | \dots, N_i - 1, \dots, N_j, \dots \rangle = \sqrt{N_i N_j} \langle i | \hat{f}^{(1)} | j \rangle. \quad (7)$$

Die symmetrischen bosonischen Wellenfunktionen sind definiert durch

$$|N_1, N_2, \dots\rangle = \left(\frac{N_1! N_2! \dots}{N!} \right)^{1/2} \sum_P \phi_{P_1}(x_1) \phi_{P_2}(x_2) \dots \phi_{P_N}(x_N) \quad (8)$$

mit $N = \sum_i N_i$ und den Einteilchenwellenfunktionen $\phi_i(x_i)$ im Zustand i .

Analog zu den Einteilchenoperatoren können bosonische Zweiteilchenoperatoren $\hat{F}^{(2)}$ in zweiter Quantisierung dargestellt werden durch

$$\hat{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik | \hat{f}^{(2)} | lm \rangle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_l \quad (9)$$

mit den Matrixelementen

$$\langle ik | \hat{f}^{(2)} | lm \rangle = \iint dx_1 dx_2 \phi_i^*(x_1) \phi_k^*(x_2) \hat{f}^{(2)} \phi_l(x_1) \phi_m(x_2) \quad .$$

Leiten Sie aus $\hat{F}^{(2)} = \sum_{a<b} f_{ab}^{(2)}$ (Operator wirkt auf Koordinaten x_a und x_b) die Form (9) her. Finden Sie dazu die zu Gln. (6) und (7) analogen Ausdrücke für Zweiteilchenoperatoren. Unterscheiden Sie, ob $\hat{f}^{(2)}$ zweimal auf den gleichen Einteilchenzustand oder auf zwei unterschiedliche Einteilchenzustände wirkt.

3. Thermodynamische Störungstheorie

(45 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein Gas spinloser Bosonen der Masse m in einem Volumen $V = L^3$, mit periodischen Randbedingungen für die Wellenfunktionen. Nehmen Sie an, dass die Teilchen über ein Potential $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ mit $U_0 > 0$ paarweise wechselwirken. Ausgedrückt in zweiter Quantisierung hat der Wechselwirkungsteil des Hamiltonoperators ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}$) dann die Form

$$\hat{U} = \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4} \hat{a}_{\mathbf{k}_3}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_4}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \quad (10)$$

Das chemische Potential μ und die Temperatur T seien vorgegeben.

- (a) Betrachten Sie $\hat{U}$ als kleine Störung und zeigen Sie, dass die Korrektur erster Ordnung in U_0 zum großkanonischen Potential gegeben ist durch

$$\delta\Omega = \langle \hat{U} \rangle_{H_0} = \frac{\text{tr} \left\{ \hat{U} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} \right\}}{\text{tr} \left\{ e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} \right\}} \quad (11)$$

Hinweis: Benutzen Sie die zeitunabhängige Störungstheorie der Quantenmechanik.

- (b) Berechnen Sie $\delta\Omega$. Im relevanten Matrixelement können entweder zwei Bosonen in unterschiedlichen Zuständen $\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2$ oder im gleichen Zustand $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ erzeugt werden, betrachten Sie diese beiden Fälle separat.

Mit „schriftlich“ gekennzeichnete Aufgaben sind handschriftlich zu bearbeiten und bis Mittwoch (vor der Besprechung), 10 Uhr, in den dafür vorgesehenen Kasten einzuwerfen. Die Anmeldung zur Vorleistung (Übung) ist ab Montag, dem 04.07.2016, möglich.