

**Übungen zur Theoretischen Physik F SS 2016****Prof. Dr. A. Shnirman****Blatt 2****Dr. B. Narozhny, Dipl.-Phys. P. Schad****Besprechung 29.04.2016**

---

**1. Ideales Boltzmann-Gas:**

(25 Punkten, schriftlich)

Die innere Energie eines idealen einatomigen Boltzmann-Gases beträgt  $U = 3Nk_B T/2$ , wobei die Zustandsgleichung  $pV = Nk_B T$  lautet. Hierbei bezeichnet  $N$  die Zahl der Atome,  $T$  die Temperatur,  $p$  den Druck und  $V$  das Volumen des Systems.

- (a) Berechnen Sie die Entropie des Systems  $S(T, V)$  als Funktion der Temperatur und des Volumens indem Sie von der inneren Energie ausgehen. Bestimmen Sie die freie Energie  $F(T, V)$ .

*Hinweis:* Die freie Energie ist durch  $F = U - TS$  definiert.

- (b) Analysieren Sie den Carnot-Prozess für ein ideales Boltzmann-Gas. Der Carnot-Prozess setzt sich zusammen aus einer isothermen Expansion von einem Volumen  $V_1$  zu einem Volumen  $V_2$  bei der Temperatur  $T_1$ , einer adiabatischen Expansion zu einer Temperatur  $T_2 < T_1$ , einer isothermen Kompression bei der Temperatur  $T_2$  und einer adiabatischen Kompression zum Ausgangspunkt  $(T_1, V_1)$ . Berechnen Sie die Arbeit, die vom System in jedem Schritt geleistet wird und die Wärme, die vom Gas während der isothermen Expansion (Kompression) aufgenommen (abgegeben) wird. Berechnen Sie den Wirkungsgrad (vom System geleistete Arbeit/zugeführte Wärme) der Carnot-Maschine als Funktion von  $T_1$  und  $T_2$ .

- (c) Berechnen Sie das Integral

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T},$$

über den Carnot-Prozess für das ideale Boltzmann-Gas. Dabei bezeichnet  $\delta Q$  die infinitesimale Menge an Wärme die vom System aufgenommen wird und das Integral läuft über den kompletten Carnot-Prozess. Interpretieren Sie das Ergebnis.

- (d) Untersuchen Sie den selben Carnot-Prozess in der umgekehrten Richtung (die isotherme Kompression des Gases findet bei der höheren Temperatur  $T_1$  statt). Was ist der Zweck dieses Prozesses? Berechnen Sie die Wärme, die im Prozess aus dem kalten Wärmebad entnommen wird und vergleichen Sie sie mit der Arbeit, die von einer externen Maschine geleistet wird um den Prozess zu durchlaufen.

## 2. Ultrarelativistisches Bosegas:

(25 Punkten, schriftlich)

Die innere Energie  $U$  eines ultrarelativistischen Gases von Bosonen, wie zum Beispiel Photonen, erfüllt  $U = \sigma VT^4$ , wobei  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann Konstante und  $T$  die Temperatur bezeichnet. Der Druck eines solchen Systems erfüllt  $p = U/3V$  wobei  $V$  das Volumen des Systems bezeichnet. Das chemische Potential des ultrarelativistischen Bosegases verschwindet  $\mu = 0$ . Diese Relationen folgen experimentellen Beobachtungen, später werden wir sie auch durch eine mikroskopische Theorie fundieren.

- (a) Bestimmen Sie die Entropie des Systems  $S(T, V)$  als Funktion von Temperatur und Volumen indem Sie von der inneren Energie  $U$  ausgehen. Berechnen Sie die freie Energie  $F(T, V)$ . Geben Sie die Abhängigkeit des Drucks vom Volumen in einem adiabatischen Prozess an.

*Hinweis:* Die freie Energie ist durch  $F = U - TS$  definiert.

- (b) Analysieren Sie einen geschlossenen Carnotzyklus für das ultrarelativistische Bosegas. Berechnen Sie Arbeit, die vom System in jedem Schritt geleistet wird und die Wärme, die vom System während der isothermen Expansion (Kompression) aufgenommen (abgegeben) wird. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad (vom System geleistete Arbeit/zugeführte Wärme) der Carnot-Maschine als Funktion von  $T_1$  und  $T_2$ .

- (c) Berechnen Sie das Integral

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T},$$

über den Carnot-Prozess für das ultrarelativistische Bose-Gas. Dabei bezeichnet  $\delta Q$  die infinitesimale Menge an Wärme die vom System aufgenommen wird und das Integral läuft über den kompletten Carnot-Prozess. Interpretieren Sie das Ergebnis.

## 3. Thermodynamische Antwortfunktionen:

(25 Punkten, mündlich)

Ein magnetisches System sei durch die Zustandsgrößen  $S$ ,  $T$ , Magnetisierung  $M$  und das Magnetfeld  $H$  bestimmt. Betrachten Sie die Freie Energie

$$d\tilde{F} = -SdT - MdH.$$

Von experimentellem Interesse sind die Antwortfunktionen

$$c_M = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_M, \quad c_H = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H, \quad \chi_S = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_S, \quad \chi_T = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T.$$

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{c_H}{c_M} = \frac{\chi_T}{\chi_S}.$$

*Hinweis:* Wir haben  $T$  und  $H$  als unabhängige Variablen gewählt. Dann kann man die Antwortfunktionen  $c_H$  und  $\chi_T$  einfach laut Definition berechnen. Um  $c_M$  und  $\chi_S$  zu berechnen, betrachten Sie das vollständige Differential von  $M(T, H)$  und  $S(T, H)$ .

(b) Betrachten Sie jetzt das homogene magnetische Material mit

$$M = \chi(T)H.$$

Berechnen Sie die Antwortfunktionen  $c_M$ ,  $c_H$ ,  $\chi_T$ , und  $\chi_S$  und zeigen Sie ausdrücklich dass die obengenannte Relation gilt.

*Hinweis:*

$$S = - \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial T} \right)_H.$$

#### 4. Physikalische Bedeutung der Freien Energie:

(25 Punkten, mündlich)

Ein System  $\Sigma$  werde mit einem Wärmereservoir  $R$  mit Temperatur  $T_R$  in Kontakt gebracht. Teilchenaustausch sei nicht möglich. Die Volumina beider Systeme seien konstant. Die Änderung der inneren Energie von  $R$  kann nur durch Wärmeaustausch erfolgen,  $\delta U_R = \delta Q_R = T_R dS_R$ . Das Reservoir  $R$  sei so groß, dass  $T_R$  sich beim Wärmeaustausch praktisch nicht ändert, und somit Zustandsänderungen von  $R$  reversibel sind. Das aus  $\Sigma$  und  $R$  bestehende Gesamtsystem sei abgeschlossen. Was bedeutet das für eine infinitesimale Energieänderung der Teilsysteme? Drücken Sie die einzelnen Beiträge allein durch Änderung der extensiven Variablen  $U_\Sigma$  und  $S_\Sigma$  aus, und leiten Sie

$$dU_\Sigma \leq T_R dS_\Sigma \tag{1}$$

her. Leiten Sie daraus ein Extremalprinzip für die Helmholtzsche Freie Energie ab.