Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zu Moderne Theoretischen Physik III SS 16

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, P. Schad

Blatt 8
Besprechung: Freitag, 10.06.2016

---

1. Bose-Einstein-Kondensation (30 Punkte, schriftlich)

Bei einer kritischen Temperatur T_c kondensiert das dreidimensionale ideale Bosegas zu einem Bose-Einstein-Kondensat. Die Ableitung $c'(T) = \left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{V,N}$ hat bei T_c einen Sprung $\Delta c'$. Berechnen Sie $\Delta c'$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst N als Integral über die Bosefunktion und daraus das chemische Potential $\mu(T)$. Finden Sie einfache Ausdrücke für $\mu(T)$ in der Umgebung von T_c, die Sie für die Berechnung von $\Delta c'$ verwenden können.

2. Das ultrarelativistische entartete Fermigas (20 Punkte, schriftlich)

Wird ein Gas aus Fermionen komprimiert, dann nimmt die mittlere Energie der Fermionen zu (E_F wächst); wird sie mit mc^2 vergleichbar, so werden relativistische Effekte wesentlich. Wir betrachten hier das vollständig entartete ultrarelativistische Elektronengas, die Energie seiner Teilchen soll groß im Vergleich zu mc^2 sein. Bekanntlich hängt in diesem Fall die Energie eines Teilchens mit seinem Impuls durch die Beziehung (setze $\hbar = 1$)

$$\epsilon = ck$$

zusammen. Dieses Modell kann man z.B. verwenden, um die Elektronen in Graphen zu beschreiben.

(a) Der Fall $T = 0$ wurde in Aufgabe 1 (b) auf Blatt 7 behandelt. Verwenden Sie die Ergebnisse für U und P um eine Zustandsgleichung für U, P und V herzuleiten.

Für $T \neq 0$ kann man die thermodynamische Größen durch Integrale über die Fermi-Funktion ausdrücken. Bestimmen Sie auf diesem Weg

(b) das großkanonische Potential Ω,

(c) die innere Energie U. Überprüfen Sie, dass gilt

$$\Omega = -\frac{1}{3}U.$$

3. Thermodynamik von Phononen (50 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie die in Abb. 1 dargestellte Kette. $2N$ identische Massen m können sich auf der x-Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden:

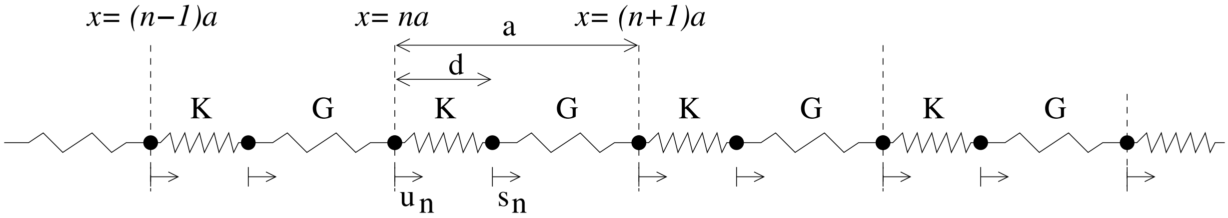

Abbildung 1: Harmonische Kette

Es sollen die klassischen Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = (na + d)$ gelöst werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}(u_n, s_n, \dot{u}_n, \dot{s}_n) = T - U, \quad \text{wobei} \quad U = \frac{K}{2}\sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2}\sum_n (u_{n+1} - s_n)^2,$$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie dann für den Ansatz

$$u_n(t) = u\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad s_n(t) = s\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad x = na,$$

dass periodische Randbedingungen

$$u_{n+N}(t) = u_n(t), \quad s_{n+N}(t) = s_n(t)$$

auf die Einschränkung

$$k = \frac{2\pi}{a}\frac{m}{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

führen, und dass für eine eindeutige Lösung $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ gelten muß.

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen als 2×2–Matrix und bestimmen Sie nun die Frequenzen $\omega_+(k)$, $\omega_-(k)$ der Eigenmoden der Kette, geben Sie jeweils auch das Verhältnis s/u an. Wie verhalten sich $\omega_\pm(k)$ und s/u für kleine $|k| \ll \pi/a$? Was bedeutet das Ergebnis anschaulich ? Skizzieren Sie $\omega_\pm(k)$ für alle erlaubten k . Wie viele akustische $(-)$ und optische $(+)$ Eigenmoden besitzt die Kette ?

(c) Die bisher betrachteten Gitterschwingungen haben die Form harmonischer Oszillatoren und können somit wie aus der Quantenmechanik bekannt quantisiert werden. Die so entstandenen Schwingungszustände heißen akustische bzw. optische Phononen, die Besetzungszahl eines Schwingungszustands gehorcht der Bose-Einstein-Statistik. Da die Anzahl der Phononen keine Erhaltungsgröße ist, ist im Gleichgewicht das chemische Potential $\mu = 0$.

Finden Sie zunächst einen allgemeinen Ausdruck für das großkanonische Potential Ω der phononischen Eigenmoden $\omega_\pm(k)$ im thermodynamischen Limit $N \to \infty$ (wegen $\mu = 0$ ist hier $\Omega = F$).

Das Spektrum der Phononen hat mehrere Eigenfrequenzen:

$$\omega_-(k = \pi/a) < \omega_+(k = \pi/a) < \omega_+(k = 0). \tag{1}$$

Nehmen Sie an, dass die Lücke im Spektrum der Phononen groß ist, $\omega_{+,k=\pi/a} \gg \omega_{-,k=\pi/a}$. Berechnen Sie das großkanonische Potential und die Wärmekapazität der Phononen in den Temperaturbereichen

(1) $k_B T \gg \hbar\omega_+(k = 0)$;

(2) $\hbar\omega_-(k = \pi/a) \ll k_B T \ll \hbar\omega_+(k = \pi/a)$;

(3) $k_B T \ll \hbar\omega_-(k = \pi/a)$.

Wie sind die Ergebnisse von (1) und (2) mit dem Gleichverteilungssatz der klassischen Statistik vereinbar? Diskutieren sie das Verhalten der Wärmekapazität bei Änderung der Temperatur.

(d) Entfernen Sie sich nun von der Vorstellung des 1D-Modells und betrachten Sie einen Kristall in D räumlichen Dimensionen. Dieser besitzt D akustische Moden mit den linearen Dispersionsrelationen $\omega_{i,k} = c_i(\hat{k})|\vec{k}|$ bei kleinem Wellenvektor $\vec{k}$ ($i = 1, \ldots D$ und $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$). Zeigen Sie, dass sich die Wärmekapazität des Kristalls bei tiefen Termperaturen wie $c_V \propto T^\alpha$ verhält und finden sie den Exponenten α.

Mit ,,schriftlich” gekennzeichnete Aufgaben sind handschriftlich zu bearbeiten und bis Mittwoch (vor der Besprechung), 10 Uhr, in den dafür vorgesehenen Kasten einzuwerfen.