Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 7
Lösungsvorschlag

---

1. Drei-Niveau-Laser:

(a) Die allgemeine Mastergleichung ist

$$\dot{p}_i = \sum_k \left(\gamma_{ki} p_k - \gamma_{ik} p_i\right),$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeiten (z.B. der Besetzung der Energieniveaus) sind. γ_{ki} ist die Rate der übergang vom Zustand k nach den Zustand i. Deshalb hat der erste Term das Vorzeichen $+$ und der zweite $-$ (d.h. Zerfall).

In unserem Drei-Niveau-System ändert sich die Besetzung des Niveaus E_1 durch Zerfall nach E_3 (mit der Rate Γ) und durch Wachstum wegen die Übergänge von E_3 (mit der Rate Γ) und von E_2 mit der Rate γ_{21}). Die entsprechende Mastergleichung ist

$$\dot{p}_1 = \gamma_{21} p_2 + \Gamma p_3 - \Gamma p_1.$$

Ähnlicherweise erhalten wir die zwei andere Gleichungen

$$\dot{p}_2 = \gamma_{32} p_3 - \gamma_{21} p_2,$$

$$\dot{p}_3 = \Gamma p_1 - \Gamma p_3 - \gamma_{32} p_3.$$

Beachten Sie dass hier

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

weil wir das Drei-Niveau-System mit einem einzelnen Elektron betrachten.

Die stationäre Lösung finden wir wie folgt:

$$\dot{p}_i = 0,$$

und zwar

$$p_1(\infty) = \frac{\gamma_{21}(\gamma_{32} + \Gamma)}{\gamma_{21}(\gamma_{32} + 2\Gamma) + \gamma_{32}\Gamma}$$

$$p_2(\infty) = \frac{\gamma_{32}\Gamma}{\gamma_{21}(\gamma_{32} + 2\Gamma) + \gamma_{32}\Gamma}$$

$$p_3(\infty) = \frac{\gamma_{21}\Gamma}{\gamma_{21}(\gamma_{32} + 2\Gamma) + \gamma_{32}\Gamma}.$$

Insbesondere:

$$p_2(\infty) - p_1(\infty) = \frac{\gamma_{32}\Gamma - \gamma_{21}(\gamma_{32} + \Gamma)}{\gamma_{32}\Gamma + \gamma_{21}(\gamma_{32} + 2\Gamma)}.$$

Die Differenz $p_2(\infty) - p_1(\infty)$ kann positiv sein wenn

$$\gamma_{21} < \gamma_{32}\Gamma/(\gamma_{32} + \Gamma).$$

In diesem Fall finden wir die Besetzungsinversion.

Im Limes $\gamma_{21} \ll \gamma_{32} \ll \Gamma$ können wir die Lösung vereinfachen. Wir setzen $\gamma_{21} = 0$ und finden

$$p_3(\infty) = p_1(\infty) = 0 \qquad p_2(\infty) = 1.$$

Hier ist die Besetzungsinversion besonders transparent.

(b) Jetzt haben wir zwei neuen Übergangsraten, $\gamma_{12}^{\mathrm{st}} = \gamma_{21}^{\mathrm{st}} = gn$ und im Limes $\gamma_{21}^{\mathrm{st}} \gg \gamma_{21} = 0$ können wir die Rate γ_{21} vernachlässigen. Wir erhalten dann die folgende Mastergleichungen

$$\dot{p}_1 = gnp_2 + \Gamma p_3 - gnp_1 - \Gamma p_1$$

$$\dot{p}_2 = gnp_1 + \gamma_{32}p_3 - gnp_2$$

$$\dot{p}_3 = \Gamma p_1 - \Gamma p_3 - \gamma_{32}p_3.$$

Dazu haben wir noch die Gleichung für die Anzahl der Photonen

$$\dot{n} = gnN(p_2 - p_1) - \kappa n.$$

Die stationäre Lösung für p_i ist jetzt

$$p_1(\infty) = \frac{gn(\infty)(\gamma_{32} + \Gamma)}{\gamma_{32\Gamma} + gn(\infty)(2\gamma_{32} + 3\Gamma)}$$

$$p_2(\infty) = \frac{\gamma_{32}\Gamma + gn(\infty)(\gamma_{32} + \Gamma)}{\gamma_{32\Gamma} + gn(\infty)(2\gamma_{32} + 3\Gamma)}$$

$$p_3(\infty) = \frac{gn(\infty)\Gamma}{\gamma_{32\Gamma} + gn(\infty)(2\gamma_{32} + 3\Gamma)}.$$

Im Limes $\Gamma \to \infty$ erhalten wir

$$p_1(\infty) = p_3(\infty) = \frac{gn(\infty)}{3gn(\infty) + \gamma_{32}}$$

$$p_2(\infty) = \frac{gn(\infty) + \gamma_{32}}{3gn(\infty) + \gamma_{32}}.$$

Hier

$$p_2(\infty) - p_1(\infty) = \frac{\gamma_{32}}{3gn + \gamma_{32}},$$

und wir haben nochmals die Besetzungsinversion gefunden.

(c) Benutzen wir die obige Lösung im Limes $\Gamma \to \infty$ in der Gleichung für n. Die stationäre Lösung finden wir von der Gleichung

$$n(\infty)\left[\frac{gN}{\frac{3g}{\gamma_{32}}n(\infty)+1}-\kappa\right]=0.$$

Für $\kappa > gN$ ist die einzelne Lösung

$$n(\infty)=0 \qquad \Rightarrow \qquad p_3(\infty)=p_1(\infty)=0 \qquad p_2(\infty)=1.$$

Für $\kappa < gN$ gibt es zwei Lösungen. Die Lösung $n=0$ ist in diesem Regime instabil. Die zweite Lösung ist

$$n(\infty)=\frac{(gN-\kappa)\gamma_{32}}{3g\kappa}.$$

Hier kann unsere System kohärentes Licht ausstrahlen und zwar kann als einen Laser verwendet werden. Die Wahrscheinlichkeiten p_i sind in diesem Fall

$$p_1(\infty)=p_3(\infty)=\frac{1}{3}-\frac{\kappa}{3gN}, \qquad p_2(\infty)=\frac{1}{3}+\frac{2\kappa}{3gN}.$$

2. Langevin-Gleichung: RC-Schaltkreis:

(a) Wir benutzen die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung und finden

$$q=e^{-t/\tau_r}\int_0^t dt_1\frac{e^{t_1/\tau_r}}{R}\left[V(t_1)+\delta V_1(t_1)-\delta V_2(t_1)\right],$$

wobei

$$\tau_r=RC/2$$

die Relaxationszeit des Kreises ist.

(b) Wir mitteln jetzt die obege Lösung. Für $V=0$ finden wir

$$\langle q(t)\rangle_0=0, \quad \langle q^2(t)\rangle_0=TC\left(1-e^{-2t/\tau_r}\right).$$

Im Limes $t\gg\tau_r$ finden wir die zeitunabhängige Lösung

$$\langle q^2(t)\rangle_0=TC,$$

das das Äquipartitionstheorem erfüllt.

(c) Jetzt betrachten wir die zeitunabhängige (d.h., stationäre) Spannungsquelle. Wir mitteln die allgemeine Lösung und finden

$$\mu_q\equiv\langle q\rangle_{st}=\frac{1}{2}VC, \qquad \sigma_q^2\equiv\langle q^2\rangle_{st}-\langle q\rangle_{st}^2=TC.$$

Da die Statistik von δV_i gaußisch ist, soll auch die Ladung eine Normalverteilung haben. Die gaußische Verteilungsfunktion ist durch die zwei Momente komplett definiert und zwar

$$\rho_{st}(q)=\frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}}e^{-(q-\mu_q)^2/2\sigma_q^2}.$$

(d) Berechnen wir jetzt die Fourier-Transformation

$$G_q(\chi) = \int dq e^{i\chi q} \rho_{st}(q) = e^{i\chi\mu_q - \chi^2\sigma_q^2/2}.$$

Hier beachten wir die Symmetrie:

$$G_q(\chi) = G_q\left(-\chi + i\frac{2\mu_q}{\sigma_q^2}\right).$$

Benutzen wir die Werte der Momente

$$\frac{2\mu_q}{\sigma_q^2} = \frac{V}{T},$$

und finden

$$G_q(\chi) = G_q\left(-\chi + i\frac{V}{T}\right).$$

(e) Die elektrische Leistung ist

$$P(t) = V(t)I_1(t) = \frac{V(t)}{R}\left[V(t) - \frac{q(t)}{C} + \eta_1(t)\right].$$

Die von der Spannungsquelle geleistete Arbeit wärend der Zeit $\mathcal{T}$ ist die gemittelte elektrische Leistung mal $\mathcal{T}$:

$$\bar{P}_{\mathcal{T}} = \int_{t_0}^{\mathcal{T}} dt P(t).$$

Wir berechnen jetzt die folgende Mittelwerte:

$$\langle q(t)\rangle = \frac{1}{R} e^{-t/\tau_r} \int_{t_0}^{t} dt_1 e^{t_1/\tau_r} V(t_1),$$

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \langle q(t_1)\rangle\langle q(t_1)\rangle + \langle q(t_1)q(t_2)\rangle_{eq},$$
$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle_{eq} = TC\left(e^{-|t_1-t_2|/\tau_r} - e^{-(t_1+t_2)/\tau_r}\right) \approx TCe^{-|t_1-t_2|/\tau_r},$$

weil $t_0 \gg \tau_r$,

$$\langle \delta V_1(t_1)q(t_2)\rangle = 2T\theta(t_2 - t_1)e^{-(t_2-t_1)/\tau_r},$$

wobei $\theta(x) = 1$ für $x > 0$, sonst $\theta(x) = 0$,

$$\langle \delta V_1(t_1)q(t_2)\rangle + \langle q(t_1)\delta V_1(t_2)\rangle = \frac{2}{C}\langle q(t_1)q(t_2)\rangle_{eq}.$$

Für die vermittelte Arbeit finden wir jetzt

$$\langle \bar{P}_{\mathcal{T}}\rangle = \frac{1}{R}\int_0^t dt_1 V^2(t_1) - \frac{1}{R^2 C}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2)e^{(t_2-t_1)/\tau_r}.$$

Die Varianz ist

$$\langle \bar{P}_{\mathcal{T}}^2 \rangle = \langle \bar{P}_{\mathcal{T}} \rangle^2 + \frac{2T}{R} \int\limits_0^t dt_1 V^2(t_1) - \frac{1}{R^2 C^2} \int\limits_{t_0}^t dt_1 \int\limits_{t_0}^t dt_2 V(t_1) V(t_2) \langle q(t_1) q(t_2) \rangle_{eq}.$$

Die Integrale in die zwei Relationen sind identisch und zwar

$$2T \langle \bar{P}_{\mathcal{T}} \rangle = \langle \bar{P}_{\mathcal{T}}^2 \rangle - \langle \bar{P}_{\mathcal{T}} \rangle^2.$$

Die Verteilungsfunktion ist auch Gaußisch

$$\rho(\bar{P}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} e^{-(\bar{P}_t - \mu_p)^2 / 2\sigma_p^2}.$$

Das erzeugende Funktional der Arbeit definiert man nun mithilfe der Laplace-Transformation:

$$G_p(\lambda) = \int dp e^{-\lambda p} \rho(p) = e^{-\lambda \mu_p + \lambda^2 \sigma_p^2 / 2}.$$

Hier finden wir die Symmetrie

$$G_p(\lambda) = G_p \left(\frac{2\mu_p}{\sigma_p^2} - \lambda \right).$$

Weil

$$\frac{2\mu_q}{\sigma_q^2} = \frac{1}{T},$$

finden wir letztendlich

$$G_p(\lambda) = G_p \left(\frac{1}{T} - \lambda \right).$$