

## Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman  
PD Dr. B. NarozhnyBlatt 1  
Besprechung 27.04.2018

## 1. Das ideale Bose-Gas in der Nahe der kritischen Temperatur: (30 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Bose-Gas bei Temperaturen  $T$  knapp oberhalb der Kondensationstemperatur  $T_c(n)$ . Die Dichte der Teilchen hängt folgendermaßen von der Temperatur und dem chemischen Potential  $\mu$  ab (hier  $\hbar = k_B = 1$ )

$$n = \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda_T^3}, \quad g_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^\alpha}, \quad \lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi}{mT}}, \quad z = e^{\mu/T}.$$

Wir nehmen die Dichte hier als konstant an, so dass  $\mu$  nur über die Temperatur variiert werden kann. Lösen sie diese Gleichung für  $0 < T - T_c(n) \ll T_c(n)$  nach  $\mu$  auf und zeigen Sie, dass das chemische Potential mit  $[T - T_c(n)]^2$  verschwindet.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass für  $0 < 1 - z \ll 1$  gilt

$$g_{3/2}(z) = g_{3/2}(1) - 2\sqrt{\pi(1-z)}.$$

## 2. Bose-Einstein-Kondensation I: (40 Punkte)

Bei einer kritischen Temperatur  $T_c$  kondensiert das dreidimensionale ideale Bosegas zu einem Bose-Einstein-Kondensat. Die Ableitung  $c'(T) = (\partial c_V / \partial T)_{V;N}$  hat bei  $T_c$  einen Sprung  $\Delta c'$ . Berechnen Sie  $\Delta c'$ .

*Hinweis:* Berechnen Sie zunächst  $N$  als Integral über die Bosefunktion und daraus das chemische Potential  $\mu(T)$ . Finden Sie einfache Ausdrücke für  $\mu(T)$  in der Umgebung von  $T_c$ , die Sie für die Berechnung von  $\Delta c'$  verwenden können.

## 3. Bose-Einstein-Kondensation II: (30 Punkte)

Untersuchen Sie für die folgenden bosonischen Systeme, ob unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_c > 0$  im thermodynamischen Limes Bose-Einstein-Kondensation auftritt:

- $N$  massive, nichtrelativistische Bosonen in drei Dimensionen in einem harmonischen Potential  $V(\mathbf{r}) = k|\mathbf{r}|^2/2$  mit  $k > 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ).
- $N$  ultrarelativistische (massenlose) Bosonen in einem dreidimensionalen Volumen  $V$  ( $V \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $N/V = \text{konstant}$ ).

- (c)  $N$  Bosonen mit Dispersionsrelation  $\epsilon(\mathbf{p}) = \alpha|\mathbf{p}|^4$  in einem zweidimensionalen Volumen  $V$  ( $V \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $N/V = \text{konstant}$ ).

Die Antworten müssen begründet werden.

*Hinweis:* Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Teilchenzahl und dem chemischen Potential.