

Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. NarozhnyBlatt 4
Besprechung 18.05.2018

1. Magnonen im ferromagnetischen Heisenberg-Modell: (50 Punkte)

Wir betrachten das ferromagnetische Heisenberg-Modell

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mathbf{H} \sum_i \mathbf{S}_i,$$

wobei $J_{ij} > 0$ und die Spin-Operatoren die übliche Umtauschrelationen erfüllen:

$$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = i\delta_{ij}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_i^\gamma.$$

- Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Spin-Operatoren in der Heisenbergschen Darstellung her.
- Betrachten Sie jetzt die Molekulärfeldnäherung für $\mathbf{H} = 0$. Nehmen Sie an, dass $\langle S_i^z \rangle \approx S$ (wobei S der Betrag des Spins ist, z.B. $S = 1/2$ oder $S = 1$, d.h., die Eigenwerte des Operators S^z sind $-S, -(S-1), \dots, (S-1), S$). Alle anderen Spin-Komponenten (S_i^x und S_i^y) betrachten Sie als klein. Schreiben Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen.
- Lösen Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen und finden Sie das Anregungsspektrum für das Modell mit Wechselwirkung der nächsten Nachbarn, d.h., $J_{ij} = J > 0$ falls Gitterplätze i und j nächste Nachbarn sind, sonst $J_{ij} = 0$.
Hinweis: Benutzen Sie die Fourier-Transformation.
- Betrachten Sie den einfachsten Fall des dreidimensionalen kubischen Gitters. Berechnen Sie die Dispersion von Magnonen. Betrachten Sie den Limes $q \rightarrow 0$ und finden Sie die effektive Masse von Magnonen.

2. Molekulärfeldnäherung für Antiferromagneten: (50 Punkte)

Wir betrachten das antiferromagnetische Ising-Modell:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i,$$

wobei $\sigma_i = \pm 1$ und $J_{ij} = J < 0$ falls Gitterplätze i und j nächste Nachbarn sind, sonst $J_{ij} = 0$.

- (a) Schreiben Sie den Hamilton-Operator in der Molekulärfeldnäherung. Vernachlässigen Sie die Beiträge zweiter Ordnung in Fluktuationen

$$(\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle) (\sigma_j - \langle \sigma_j \rangle) \rightarrow 0.$$

Hinweis: Unterschiedlich vom ferromagnetischen Fall, müssen hier zwei Untergitter und zwei Ordnungsparameter (Magnetisierungen der jeweiligen Untergitter) betrachtet werden.

- (b) Berechnen Sie die freie Enthalpie $G(T, H)$ des Ising-Modells in der Molekulärfeldnäherung.
- (c) Finden Sie die Weiss'sche Gleichungen (Selbstkonsistenz-Gleichungen) für die zwei Ordnungsparameter (ein für jedes Untergitter).
- Hinweis:* Betrachten Sie ein Minimum der freien Enthalpie.
- (d) Finden Sie die kritische Temperatur für $H = 0$.
- (e) Finden Sie die magnetische Suszeptibilität und betrachten Sie die Grenzfälle $T \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_c - 0$, und $T \rightarrow T_c + 0$.