Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 5
Besprechung 25.05.2018

---

1. Landau-Funktional des Ising-Modells $(40+20+20+20=100$ Punkte)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass ein Ising-Modell im Limes groer Wellenlängen (kleine $\boldsymbol{k}$) durch ein Landau-Funktional beschrieben werden kann. Betrachten Sie ein Ising-Modell aus N Spins ($\sigma_i = \pm 1$) auf einem 3-dimensionalen Gitter mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung (J_{ij}):

$$\mathcal{H} = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij}\sigma_i\sigma_j. \tag{1}$$

Die Wechselwirkungskonstanten J_{ij} können hier als Matrix $\hat{J}$ aufgefasst werden, die Matrix $\hat{J}$ sei invertierbar. (In Matrixschreibweise mit Vektoren $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ kann man den Wechselwirkungsterm schreiben als $-\boldsymbol{\sigma}\hat{J}\boldsymbol{\sigma}$.)

(a) Führen Sie die Summen über $\sigma_i = \pm 1$ in der Zustandssumme aus. Entkoppeln Sie dazu die Spin-Spin-Wechselwirkungsterme mit der Hubbard-Stratonovich-Transformation

$$e^{\beta\sum_{i,j}\sigma_i J_{ij}\sigma_j} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\beta)^N \det \hat{J}}}\int \prod_i dx_i e^{-\frac{1}{4\beta}\sum_{i,j} x_i \left(\hat{J}^{-1}\right)_{ij} x_j + \sum_i x_i\sigma_i}. \tag{2}$$

Ersetzen Sie dann die Variablen x_i in der Zustandssume mit neuen Variablen φ_i,

$$\varphi_i = \frac{1}{\beta\sqrt{2}}\sum_j \left(\hat{J}^{-1}\right)_{ij} x_j, \tag{3}$$

entwickeln Sie den Exponenten in der Form $\log(\cosh z) \approx \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12}$ und fassen Sie die quadratischen Terme im Exponenten zusammen.

(b) Transformieren Sie mit

$$\varphi_i = \varphi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \varphi_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\ , \tag{4}$$

analog $J_{ij} = J(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$, in den Fourierraum. Die Summe $\sum_{\boldsymbol{k}}$ luft ber alle N mglichen Werte von $\boldsymbol{k}$. Wie sieht das Landau-Funktional $F[\varphi_{\boldsymbol{k}}]$ in

$$Z \propto \sqrt{\beta^N}\int \prod_{\boldsymbol{k}} d\varphi_{\boldsymbol{k}} e^{-\beta F[\varphi_{\boldsymbol{k}}]} \tag{5}$$

aus?

(c) Betrachten Sie den Limes groer Wellenlängen, $k_x, k_y, k_z \ll 1/\bar{a}$: Vereinfachen Sie $J_{\boldsymbol{k}}$ zu (Gitterkonstante $\bar{a}$)

$$J_{\boldsymbol{k}} \approx 2J\left(d - \bar{a}^2\boldsymbol{k}^2\right) = J_0\left(1 - \frac{\bar{a}^2}{d}\boldsymbol{k}^2\right). \tag{6}$$

Benutzen Sie dazu, dass die J_{ij} nur fr Nächste-Nachbar-Paare von Null verschieden sind. Auch den Wechselwirkungsterm knnen Sie mit (6) vereinfachen, nehmen Sie dabei nur den konstanten ($\boldsymbol{k}$-unabhängig) Beitrag mit.

(d) Im Limes kleiner $|\boldsymbol{k}| \ll \bar{a}$ ist es sinnvoll, die Summe über $\boldsymbol{k}$ in $F[\varphi_{\boldsymbol{k}}]$ auf Integralform zu bringen. Benutzen Sie die kontinuierliche Fourier-Transformation $\varphi_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{V}\int d^3r\varphi(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ um wieder in den Ortsraum zu transformieren und zeigen Sie, dass

$$F[\varphi(\boldsymbol{r})] = \frac{g_0}{2}\int d^3r\left(a\varphi^2(\boldsymbol{r}) + \xi_0^2(\nabla\varphi(\boldsymbol{r}))^2 + \frac{b}{2}\varphi^4(\boldsymbol{r})\right), \tag{7}$$

wobei $a = \frac{T-T_c}{T}$ sein soll. Geben Sie g_0, T_c, ξ_0 und b an.
Damit haben Sie aus dem Ising-Modell (1) ein Landau-Funktional hergeleitet. Bei $T = T_c$ wechselt a das Vorzeichen und es findet ein Phasenbergang statt.