Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Physik der Quanteninformation SS 2019

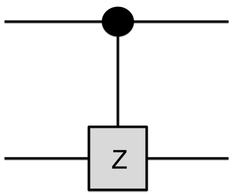
Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 1
Besprechung 06.06.2019

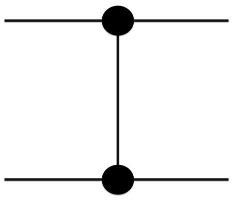
---

1. C-Z-Gate: (15 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung das C-NOT-Gate als universelles 2-Qubit Gate kennen gelernt. Häufig ist es jedoch einfacher ein C-Z-Gate zu realisieren. Falls das Kontroll Qubit im Zustand $|1\rangle$ ist, wird das Ziel Qubit mit σ_z transformiert, und andernfalls passiert nichts. Das Gatesymbol ist:



Die alternative Bezeichnung ist:



Warum ist im alternativen Gatesymbol nicht erkennbar welches Qubit das Kontroll Qubit ist?

Der Hamilton-Operator

$$H(t) = \alpha(t)\sigma_z^{(1)} + \beta(t)\sigma_z^{(2)} + \gamma(t)\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$$

beschreibt zwei Spins (Q-Bits), die sich jeweils in Magnetfeldern mit einer Stärke proportional zu $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ befinden und durch eine Ising-Wechselwirkung gekoppelt sind.

Wie muss man die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ wählen, damit ein C-Z-Gate erreicht wird?

2. Gültigkeit der Rotating-Wave-Approximation (25 Punkte)

Wir betrachten einen resonant angetriebenen Spin-1/2:

$$H(t) = -\frac{1}{2}B\sigma_z + \Omega_R\cos(\omega t)\sigma_x \ .$$

In der Resonanz gilt $\omega = B$. Gehen Sie in das rotierende Bezugssystem über und benutzen Sie die RWA (Rotating-Wave-Approximation). Finden Sie die stationären Zustände im rotierendem Bezugssystem (mit RWA).

Betrachten Sie jetzt die in der RWA vernachlässigten Beiträge als Störung. Benutzen Sie die Störingstheorie und formulieren Sie das Kriterium der Gültigkeit der RWA.

3. Nicht-abelsche geometrische Phase **(60 Punkte)**

Betrachten Sie ein Vierzustandssystem, das durch den Hamilton-Operator

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \Omega_1^* & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_2^* & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_3^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

beschrieben wird. Hierin sind die Frequenzen Ω_i gegeben durch

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega \sin(\beta(t)) \cos(\alpha(t)) e^{i\gamma(t)}, \\ \Omega_2 &= \Omega \sin(\beta(t)) \sin(\alpha(t)) e^{i\gamma(t)}, \\ \Omega_3 &= \Omega \cos(\beta(t)). \end{aligned} \tag{2}$$

(a): Finden Sie die Eigenenergien des Hamilton-Operators für eine beliebige Wahl von α, β und γ. Welchen Entartungsgrad haben die Eigenenergien?

(c): Das System befinde sich zur Zeit $t_0 = 0$ im entarteten Unterraum, der durch die beiden Vektoren

$$|D_1(t)\rangle = \cos(\beta(t))(\cos(\alpha(t))|1\rangle + \sin(\alpha(t))|2\rangle)e^{i\gamma(t)} - \sin(\beta(t))|3\rangle, \tag{3}$$

$$|D_2(t)\rangle = \cos(\alpha(t))e^{i\gamma(t)}|2\rangle - \sin(\alpha(t))e^{i\gamma(t)}|1\rangle \tag{4}$$

aufgespannt wird. Überzeugen Sie sich, dass die Vektoren $|D_1(t)\rangle$ und $|D_2(t)\rangle$ orthonormal und entartet sind.

Jetzt wird das System adiabatisch getrieben und die Winkel α, β und γ ändern sich langsam in der Zeit. Berechnen Sie das Eichpotential A mit

$$A_{ij,\mu} = i\langle D_i|\frac{\partial}{\partial \chi^\mu}|D_j\rangle. \tag{5}$$

Hierbei ist $\vec{\chi} = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))^T$ der Vektor, der den Parameterraum aufspannt. Beachten Sie, dass das Eichpotential in diesem Fall matrixwertig ist. Die Parameter durchlaufen nacheinander die Pfade C_1 und C_2, wobei die Pfade gegeben sind durch

$$\begin{aligned} C_1 &: (0,0,0) \to (0,\pi/2,0) \to (\pi/2,\pi/2,0) \to (\pi/2,0,0) \to (0,0,0) \\ C_2 &: (0,0,0) \to (0,\pi/2,0) \to (0,\pi/2,\pi/2) \to (0,0,\pi/2) \to (0,0,0). \end{aligned}$$

Analog zur abelschen Berry-Phase ändert sich das System beim Durchlaufen des Pfades gemäß der Zeitentwicklung

$$U = \mathcal{T}_C \exp\left(i \int A_\mu d\chi^\mu\right), \tag{6}$$

wobei $\mathcal{T}_C$ der Pfad-Ordnungs-Operator ist. Natürlich nimmt das System bei der Zeitentwicklung auch eine dynamische Phase $\phi_{\text{dyn}} = \int_0^t dt' E_n(t')$ auf. Die dynamische Phase ist in diesem Unterraum gleich Null und muss deswegen nicht berücksichtigt werden. Berechnen Sie U für den Weg, bei dem zuerst C_1 und dann C_2 durchlaufen wird ($U = U_2 U_1$) und anschließend für den Weg, bei dem zuerst C_2 und dann C_1 durchlaufen wird ($U = U_1 U_2$). Vergleichen Sie das Ergebnis.