Übungen zur Physik der Quanteninformation SS 2019

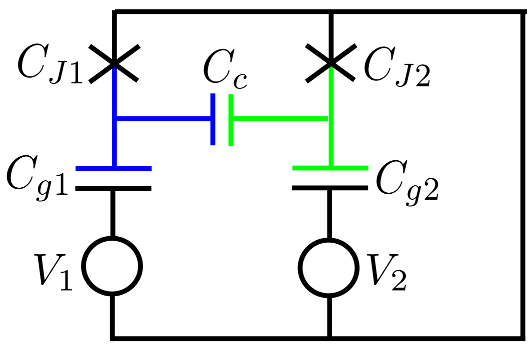
Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 4

Besprechung 25.07.2019

---

1. Zwei gekoppelte Ladungs-Qubits: (50 Punkte)



Im obigen Bild sehen Sie eine mögliche Realisierung von zwei Ladungs-Qubits (Charge Qubit), die über eine Kapazität C_c miteinander gekoppelt sind, wobei die Insel des ersten Qubits in blau eingefärbt ist und die des zweiten Qubits in grün.

Ordnen Sie entsprechend der Vorlesung jedem Element des Schaltkreises eine Phase (in Einheiten des magnetischen Flusses) zu und schreiben Sie die Lagrangefunktion auf. Achten Sie darauf, dass die Josephson Kontakte mit Josephson-Energien E_{J1} und E_{J2} auch die Kapazitäten C_{J1} und C_{J2} beinhalten (im Bild sind nur die Kapazitäten C_{J1} und C_{J2} gegeben). Durch die Tatsache, dass sich die Phasen entlang eines geschossenen Weges zu Null aufaddieren müssen, können Sie einige Variablen eliminieren. Führen Sie nun eine Legendre-Transformation durch um die Hamiltonfunktion zu erhalten. Führen Sie die kanonische Quantisierung durch. Wenn die Kapazitäten hinreichend klein sind ($E_C \gg E_J$), dann sind in jeder Insel nur zwei Ladungszustände relevant. Geben sie den 4-dimensionalen Hamilton-Operator der zwei Qubits in der Ladungsbasis an.

2. Jaynes–Cummings-Modell: (50 Punkte)

Ein Zwei-Niveau-Atom in einer optischen Kavität oder ein Josephson-QuBit in einer Mikrowellen-Kavität sind mithilfe des folgenden Hamilton-Operator beschrieben

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar g \left(a^\dagger \sigma_- + a\sigma_+\right) \ . \tag{1}$$

Das ist das bekannte Jaynes–Cummings-Modell indem ein Zwei-Niveau-System mit einem linearen Oszillator wechselwirkt.

(a):(25 Punkte) Das Jaynes–Cummings-Modell ist exakt lösbar. Finden Sie die Eigenniveaus und Eigenenergien. (Hinweis: überzeugen Sie sich, dass der Operator $N = a^\dagger a + \sigma_z$ (die gesamte Zahl der Anregungen) erhalten ist).

(b):(25 Punkte) Analysieren Sie erst den Fall $\Delta \equiv \omega_a - \omega_r = 0$. Wie sieht das Spektrum aus? Betrachten Sie nun den Limes $\Delta \gg g$. Analysieren Sie die Eigenenergien in der führenden Näherung und zeigen Sie, dass der effektive Hamilton-Operator in diesem "dispersiven" Limes durch

$$H_{\text{disp}} = \hbar \left(\omega_r + \chi \sigma_z\right) a^\dagger a + \frac{\hbar(\omega_a + \chi)}{2} \sigma_z$$

gegeben ist. Hier die dispersive Energie-Verschiebung ist gegeben durch $\chi \equiv g^2/\Delta$.

(c*):(Bonus 25 Punkte) In physikalischen Systemen die realistische Wechselwirkung zwischen dem Zwei-Niveau-System und dem Oszillator ist durch den folgenden Glied im Hamilton-Operator gegeben: $\hbar g \left(a^\dagger + a\right) \sigma_x$ (anstatt $\hbar g \left(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+\right)$ in Gl. 1). Unter welcher Bedingung darf man Gl. 1 benutzen?