Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb) **Sommersemester 2019**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex

Blatt 4
Besprechung: 24.05.2019

---

1. Fluktuationen und Mermin-Wagner-Theorem: (15+25=40 Punkte)

In der Vorlesung haben wir im Detail die Landau-Theorie mit einem skalaren Ordnungsparameter ϕ besprochen. Eine solche Theorie beschreibt Phasenübergänge, die mit der spontanen Brechung einer diskreten Symmetrie assoziiert sind (z.B. für das Ising-Modell). Es gibt Systeme, in denen der Phasenübergang mit der Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie einhergeht. In dieser Aufgabe betrachten wir ein Beispiel dafür, die entsprechende Landau-Theorie und einige ihrer Konsequenzen.

Betrachten Sie ein D dimensionales Gitter mit magnetischen Momenten $\vec{\sigma}_i$, die gezwungen sind in einer Ebene zu liegen, $\vec{\sigma}_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y)$. Der Ordnungsparameter des Systems ist ein zweidimensionaler Vektor $\vec{m}(\vec{r}) = \langle \vec{\sigma}_i \rangle$. Bei hohen Temperaturen ist das System in einem paramagnetischen Zustand mit verschwindender mittlerer Magnetisierung. Wenn die Temperatur erniedrigt wird, kann das System in einen ferromagnetischen Zustand übergehen, der die Rotationsinvarianz bricht.

Das Landau-Funktional

$$\mathcal{F}[\vec{m}(\vec{r})] = \int d^D r \left\{ \frac{t}{2}|\vec{m}|^2 + b|\vec{m}|^4 + \frac{K}{2}\left[(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2\right] \right\},$$
$$\vec{m} = (m_x, m_y), \quad |\vec{m}|^2 = m_x^2 + m_y^2 \quad t = a(T - T_c), \quad a, b, K > 0. \tag{1}$$

wird durch uniforme Ordnungsparameterkonfigurationen minimiert, $\vec{m}(r) =$ konst. Auf Grund der Rotationssymmetrie können wir $\vec{m}(r) = (m_0, 0)$ wählen.

(a) Zeigen Sie, dass für $T > T_c$ das Landau-Funktional (1) sein Minimum bei $m_0 = 0$ erreicht, während für $T < T_c$ das Minimum bei $m_0 = \sqrt{|t|/4b}$ liegt.

Betrachen Sie Fluktuationen des Ordnungsparameters δm_x und δm_y in der symmetriegebrochenen Phase, $T < T_c$. Bestimmen Sie das Landau-Funktional, das kleine Fluktuationen des Ordnungsparameters in der Gauss'schen Näherung beschreibt.

(b) Mit Hilfe der Fourier-Entwickung von $\delta m_y(r)$ zeigen Sie, dass die Korrelationsfunktion $\langle \delta m_y(0) \delta m_y(r) \rangle$ durch

$$\langle \delta m_y(0) \delta m_y(r) \rangle = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{Kq^2} \exp(i\,\vec{q}\,\vec{r}) \tag{2}$$

gegeben ist. Vergleichen Sie Gl. (2) mit der Korrelationsfunktion der Ordnungsparameterfluktuationen in der skalaren Landau-Theorie, die in der Vorlesung diskutiert wurde.

Analysieren Sie die Konvergenz des Integrals (2) bei kleinen $\vec{q}$ und zeigen Sie, dass die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie in $D \leq 2$ Dimensionen nicht möglich ist (Mermin-Wagner-Theorem).

2. Phasenübergänge erster Ordnung: (15+10=25 Punkte)

Betrachten Sie ein System, in dem das Freie-Energiedichte-Funktional für den Ordnungsparameter ϕ den kubischen Term enthält:

$$f(\phi) = \frac{t}{2}\,\phi^2 - v\,\phi^3 + b\,\phi^4, \tag{3}$$

wobei $t = a(T - T_0)$ und $a, b, v > 0$.

(a) Skizzieren Sie die Freie-Energiedichte als Funktion von ϕ für verschiedene Temperaturen T. Bestimmen Sie die Übergangstemperatur T_c und den Wert von ϕ bei $T = T_c$.

(b) Berechnen Sie die Entropie S für T unmittelbar oberhalb bzw. unterhalb T_c. Bestimmen Sie die latente Wärme $Q_l = T\,\Delta S$ des Phasenübergangs.

(c) **Bonusaufgabe:** (20 Punkte)
Betrachten Sie die räumlichen Fluktuationen des Ordnungsparameters, die durch den Term $(K/2)\left|\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right|^2$ mit $K > 0$ in der Energiedichte beschrieben werden. Nehmen Sie an, dass die Temperatur des Systems geringfügig unter die Übergangstemperatur gesunken ist, das System sich aber größtenteils noch in der metastabilen ungeordneten Phase befindet. Betrachten Sie ein Tröpfchen mit dem Radius R, in dessen Innerem bereits die geordnete Phase vorliegt (vergleichbar mit einem Kondensationskeim). Die Grenzschicht zur ungeordneten Phase an der Oberfläche des Tröpfchens habe die Dicke l_0. Bestimmen Sie den kritischen Keimbildungsradius R_c, ab dem sich die geordnete Phase weiter ausbreitet, sowie die Energie eines solchen Keimbildungströpfchens.

3. Gekoppelte Ordnungsparameter: (10+25=35 Punkte)

In einem ferroelektrischen Kristall entsteht unterhalb einer Übergangstemperatur T_c eine spontane Verzerrung ψ der Einheitszelle, verbunden mit einem Dipolmoment $\vec{P}$. Das Freie-Energiedichte-Funktional für die beiden Ordnungsparameter $\eta = |\vec{P}|$ und ψ lautet

$$f(\eta, \psi) = a \cdot (T - T_0)\,\eta^2 + b\,\eta^4 + c\,\eta^6 + d\,\psi\eta^2 + \frac{g}{2}\,\psi^2, \qquad T_0, a, b, c, d, g > 0.$$

(a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtswert $\psi = \psi_G(\eta)$ und damit das Freie-Energiedichte-Funktional $\tilde{f}(\eta) = f(\eta, \psi_G(\eta))$. Skizzieren Sie den Verlauf von $\tilde{f}(\eta)$ für verschiedene Temperaturen T in drei Fällen: $\tilde{b} > 0$, $\tilde{b} = 0$ und $\tilde{b} < 0$, wobei

$$\tilde{b} = b - \frac{d^2}{2g}.$$

Begründen Sie, dass ein Phasenübergang 1. Ordnung auftreten kann.

(b) Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c, bei der dieser Übergang stattfindet. Bestimmen Sie näherungsweise $\eta(T)$ und $\psi(T)$ in der Nähe von T_c. Bestimmen Sie die latente Wärme des Übergangs. Berechnen Sie den kritischen Exponenten β in $\langle\eta\rangle \propto (T_c - T)^\beta$ für den Fall $\tilde{b} = 0$.