Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb) **Sommersemester 2019**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex

Blatt 5
Besprechung: 31.05.2019

---

1. Master-Gleichung: (20+25=45 Punkte)

Ein Kasten A vom Volumen V sei mit einem viel größeren Kasten B durch ein kleines Loch verbunden. Teilchen können das Loch nur einzeln passieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit Δt ein Gasteilchen von A nach B geht, sei $\alpha N \Delta t / V$ (N: Zahl der Teilchen in A; $\alpha =$ konst.), und die Wahrscheinlichkeit von B nach A zu gehen sei $\alpha n \Delta t$ (n: konstante Teilchendichte in B).

(a) Sei $\rho(N,t)$ die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t gerade N Teilchen in A zu finden. Schreiben Sie die Master-Gleichung für $\rho(N,t)$ auf und lösen Sie sie für den stationären Fall.

(b) Bestimmen Sie $\langle N(t)\rangle$ und $\langle N^2(t)\rangle - \langle N(t)\rangle^2$ für $N(t=0) = N_0$.

2. Zwei-Niveau-Atom (20+10=30 Punkte)

Betrachten Sie ein Atom, dass sich in einem von zwei Zuständen mit den Energien $E_2 > E_1$ befinden kann. Die Wahrscheinlichkeiten, das Atom in diesen Zuständen zu finden, werden als p_i bezeichnet ($i = 1, 2$; $p_1 + p_2 = 1$). Die Wechselwirkung des Atoms mit dem elektromagnetischen Feld führt zu Übergängen zwischen den Zuständen mit den Raten γ_{12} und $\gamma_{21} \geq \gamma_{12}$.

(a) Geben Sie die Master-Gleichung für $\{p_i(t)\}$ an. Lösen Sie die Master-Gleichung mit den Anfangsbedingungen $p_i(t=0) = p_{i0}$. Wie verhält sich die Temperatur T_A eines Systems solcher Zwei-Niveau-Atome bei $t = \infty$ für $\gamma_{12} = \gamma_{21}$?

(b) Werden die Übergänge zwischen den Niveaus durch die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Quantenfeld der Frequenz $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ (im Gleichgewicht) angeregt, sind die Übergangsraten durch

$$\gamma_{12} = \Gamma\, n_B(\hbar\omega), \quad \gamma_{21} = \Gamma + \Gamma\, n_B(\hbar\omega) \tag{1}$$

gegeben, wobei n_B die Gleichgewichtsverteilung der Photonen mit Temperatur T beschreibt und Γ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass die Raten (1) die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts erfüllen und finden Sie $p_i(\infty)$.

3. Fokker-Planck-Gleichung: (25 Punkte)

Lösen Sie die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma\, x\, \rho(x,t)\right] + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t) \tag{2}$$

mit Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \delta(x)$. In der Vorlesung haben Sie den Random Walk in einem externen Feld behandelt, das einer konstanten Driftgeschwindigkeit entspricht. Was für ein Feld würde auf die obige Fokker-Planck-Gleichung führen?