Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb) Sommersemester 2019

Prof. Dr. Alexander Mirlin **Blatt 6**

PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex **Besprechung: 07.06.2019**

---

1. Langevin-Gleichung: (10+25=35 Punkte)

Betrachten Sie einen stromgetriebenen parallelen LRC-Schwingkreis. Das Verhältnis zwischen Spannung $V(t)$ und Strom $I(t)$ ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$C\ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} = \dot{I}, \tag{1}$$

wobei $I(t) = I_0(t) + \delta I(t)$ mit $\langle I(t)\rangle = I_0(t)$ und δI sogenanntes Nyquist-Rauschen des Stroms durch den Widerstand beschreibt. Es gilt:

$$\langle \delta I(t)\delta I(t')\rangle = \frac{2k_B T}{R}\delta(t-t'). \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Impedanz $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ durch Fouriertransformation der Bewegungsgleichung.

(b) Berechnen Sie die Korrelationen des Spannungsrauschens $\langle \delta V(t)\delta V(t')\rangle$ im Fall $(2RC)^2 > LC$.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\langle \delta V(\omega)\delta V(\omega')\rangle$. Bei der Rücktransformation vom Frequenz- in den Zeitraum ist der Residuensatz nützlich.

2. Verzögerte Dämpfung: (10+15+25+15=65 Punkte)

Dissipation lässt sich auch quantenmechanisch modellieren (A. Caldeira und A. Leggett, 1981). Das führt schließlich auf die klassische Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + m\int_0^t ds\ K(t-s)\dot{x}(s) = F(t), \tag{3}$$

wobei $F(t)$ eine gegebene Kraft ist. Hierbei wird die Dämpfung durch den Integralkern

$$K(t) = \Theta(t)\gamma_0\omega_d e^{-\omega_d t}$$

beschrieben, wobei $\Theta(t)$ die Heaviside-Theta-Funktion ist. Die Anfangsbedingungen sind $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

(a) Finden Sie $x(t)$ im Limes $\omega_d \to \infty$.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Laplace-Transformierte von $x(t)$,

$$\tilde{x}(z) = \int_0^\infty dt\ x(t)e^{-zt}.$$

(c) Die Suszeptibilität $\tilde{\chi}(z)$ wird durch die Relation

$$\tilde{x}_0(z) = \tilde{\chi}(z)\tilde{F}(z)$$

definiert, wobei $\tilde{x}_0(z)$ der von den Anfangsbedingungen unabhängige Teil von $\tilde{x}(z)$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\chi}(z) = \frac{1}{m}\frac{z+\omega_d}{z(z^2+z\omega_d+\gamma_0\omega_d)}.$$

Finden Sie die inverse Laplace-Transformation der Suszeptibilität

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz\, e^{zt}\tilde{\chi}(z), \qquad t>0, \quad c>0,$$

unter Verwendung von Konturintegralen in der komplexen Ebene.

(d) Betrachten wir nun eine konstante Kraft $F(t) = F_0$ für $t > 0$. Finden Sie das Verhalten von $x(t)$ im Limes $t \to \infty$.

3. Boltzmann-Gleichung: (25 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein zweidimensionales Elektronengas mit isotroper Dispersion in der xy-Ebene im externen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Ausgehend von der Boltzmann-Gleichung bestimmen Sie den Leitfähigkeitstensor $\sigma_{\alpha\beta}(\omega)$. Es sei angenommen, dass das Stoßintegral die isotrope elastische Streuung von Verunreinigungen beschreibt, d.h. die Wahrscheinlichkeit der Elektronenstreuung $\vec{k} \to \vec{k}'$ pro Zeiteinheit ist unabhängig von $\vec{k}$ und $\vec{k}'$, $W_{\vec{k}\vec{k}'} = W_0$.

Bitte melden Sie sich sowohl zur Vorleistung 1 (Tutorien) als auch zur 1. Klausur im Campus-System an!