Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb) Sommersemester 2019

Prof. Dr. Alexander Mirlin **Blatt 7**

PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex **Besprechung: 14.06.2019**

Aufgaben zur Wiederholung und Klausurvorbereitung

1. Heisenbergmagnet mit zusätzlicher Wechselwirkung (15 Punkte)

Wir betrachten das Heisenbergmodell für $N \gg 1$ Spins mit $S = 1$ auf einem kubischen Gitter mit einer zusätzlichen Wechselwirkung:

$$H = -J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - J_2 \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j)^2 \tag{1}$$

wobei über nächste Nachbarn summiert wird und $J_1 > 0$ und J_2 beliebig.

(a) Führen Sie die Molekularfeldnäherung für H durch. Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem molekularen Feld und dem mittleren Spin an. Wie lautet die Zustandssumme in der Molekularfeldnäherung?

(b) **(20 Bonuspunkte)** Leiten Sie die Selbstkonsistenzgleichung für die Magnetisierung her und untersuchen Sie in Abhängigkeit von J_2 welche Phasen auftreten können.

Hinweis: Sie können größtenteils analog zur Aufgabe 1, Blatt 3 vorgehen.

2. Spin-Flop im Antiferromagneten (10 + 30 = 40 Punkte)

In einem Antiferromagneten gibt es zwei Beiträge $\vec{m}_i$ $(i = 1, 2)$ zur Magnetisierung mit $|\vec{m}_1| = |\vec{m}_2| = M = konst.$ bei fester Temperatur. Die Austauschwechselwirkung trägt mit $f_{\text{ex}} = J\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2$ $(J > 0)$ zur Dichte der freien Energie bei, wodurch $\vec{m}_1 = -\vec{m}_2$ bevorzugt wird. Außerdem haben die meisten Magnete eine Vorzugsrichtung ("easy axis", dies sei die z-Richtung) der Magnetisierung. Dies wird durch den Anisotropie-Beitrag $f_{\text{an}} = -A(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z)^2$ mit $A > 0$ beschrieben. Wir betrachten den Antiferromagneten nun in einem äußeren Magnetfeld parallel zur Anisotropieachse, $f_B = -B(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z)$. Die freie Energiedichte lautet dann (für ein homogenes Kontinuumsmodell)

$$f(\vec{m}_1, \vec{m}_2) = f_{\text{ex}} + f_{\text{an}} + f_B = J\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - \sum_{i=1,2} \left[A(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z)^2 + B(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z) \right] . \tag{2}$$

(a) Es genügt, $\vec{m}_i$ auf die xz-Ebene zu beschränken. Dann können wir in Polarkoordinaten bzgl. der z-Achse schreiben:

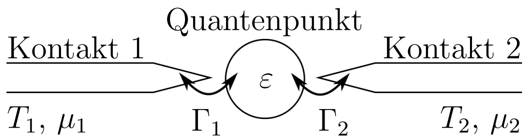
$$\vec{m}_i = \begin{pmatrix} m_{i,x} \\ m_{i,z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Um die Konfiguration des Magneten zu beschreiben, ist es nützlich, zu den Winkeln $\theta = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ und $\phi = \vartheta_1 - \vartheta_2$ überzugehen. Finden Sie $f(\theta, \phi)$.

(b) Nun wird das Magnetfeld, beginnend bei $B = 0$, kontinuierlich erhöht. Berechnen Sie die Lage des Minimums (θ_0, ϕ_0) von $f(\theta, \phi)$ als Funktion des Feldes. Bei welchen kritischen Feldstärken treten Phasenübergänge auf? Was ist jeweils der Ordnungsparameter und welcher Ordnung sind die Übergänge? Wie hängt die Anzahl der Phasenübergänge von A/J ab? Skizzieren Sie $\theta_0(B)$ und $\phi_0(B)$ für zwei qualitativ verschiedene Fälle.
Bemerkung: einen Übergang der Magnetisierung in eine Ausrichtung (ungefähr) senkrecht zur Anisotropieachse bezeichnet man auch als "spin-flop transition".

3. Strom durch einen Quantenpunkt (15 + 15 + 15 = 45 Punkte)

In einer elektrischen Nanostruktur sei ein sogenannter "Quantenpunkt" zwischen zwei dünnen Kontakten angeordnet (siehe Skizze). In dem Quantenpunkt steht einem Elektron genau ein Zustand der Energie ε zur Verfügung.



Elektronen dieser Energie können aus beiden Kontakten in den Quantenpunkt (oder umgekehrt) tunneln, nämlich mit den Raten Γ_1, Γ_2. Die Kontakte haben die Temperaturen T_i und chemischen Potentiale μ_i $(i = 1, 2)$. Der Einfachheit halber vernachlässigen wir die Spinentartung und Wechselwirkungen zwischen Elektronen.

(a) Die Wahrscheinlichkeiten, dass der Zustand im Quantenpunkt unbesetzt oder besetzt ist, seien p_0 und p_1. Notieren Sie die Mastergleichung für $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$. Finden Sie die stationäre Lösung für p_0 und p_1 und anhand dieser den elektrischen Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ (Q: el. Ladung) durch den Quantenpunkt im allgemeinen Fall.

(b) Wir betrachten nun den speziellen Fall $T_1 = T_2 =: T$, $\mu_1 = \varepsilon + \frac{1}{2}eV$, $\mu_2 = \varepsilon - \frac{1}{2}eV$, wobei V eine Spannung ist, die zwischen den Kontakten angelegt wird, und $e < 0$ die Elektronenladung. Skizzieren Sie die I-V-Kennlinie. Welchen maximalen Wert kann der Strom annehmen? In welchem Spannungsbereich findet man näherungsweise ohmsches Verhalten? Wie hängt der ohmsche Widerstand in diesem Bereich von der Temperatur ab?

(c) Ohne äußere Spannung können wir den Fall $\mu_1 = \mu_2 =: \mu$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $T_1 > T_2$ untersuchen. Bestimmen Sie den elektrischen Strom und geben Sie explizit an, in welche Richtung sich Elektronen bewegen. Wie hängt der Strom von der Größe $\Delta = \varepsilon - \mu$ ab? Finden Sie eine Näherung für den Strom $I(\delta T, T, \Delta)$ im Fall $\delta T = T_1 - T_2 \ll T \approx T_1 \approx T_2$ sowie $k_B \delta T \ll |\Delta|$ und diskutieren Sie qualitativ das Verhalten des Stromes in Abhängigkeit von T.